



---

## Uma Aplicação de Cópulas de Lévy na Agregação de Processos Multivariados de Ruína<sup>†\*</sup>

**Eduardo Fraga Lima de Melo**

COPPEAD, UFRJ

[eduardoflm@yahoo.com.br](mailto:eduardoflm@yahoo.com.br)

---

### Resumo

Neste artigo, é feita uma simples aplicação do conceito de cópulas de Lévy, introduzido inicialmente por Tankov (2003), e generalizado por Kallsen e Tankov (2004, 2006), para avaliar um processo multivariado de risco, ou, comumente traduzido no Brasil, um processo multivariado de ruína. A medida de risco utilizada neste trabalho foi a probabilidade de ruína no horizonte finito. Os processos considerados são Poisson compostos, a distribuição dos sinistros pode ser da classe das exponenciais ou das subexponenciais e a estrutura de dependência é modelada por uma versão “Lévy” da cópula de Clayton. Para o cálculo das probabilidades de ruína, executamos diferentes experimentos de simulação. Uma aplicação com dados reais também é apresentada. Nesta aplicação, os parâmetros são estimados por uma versão do conhecido método IFM (*Inference for Margins*) para cópulas tradicionais, no qual o ajuste das margens é feito separado do ajuste da cópula. Para isto, também foi feito um breve estudo sobre a performance da estimação por máxima verossimilhança de cópulas de Lévy, através do cálculo do erro médio quadrático obtido em simulações.

---

### Palavras-Chave

Cópulas de Lévy; Simulação e Inferência; Probabilidades de ruína.

---

### Sumário

1. Introdução; 2. Processos de Lévy multidimensionais; 3. Modelagem do processo de risco multivariado; 4. Avaliação das probabilidades de ruína; 5. Inferência para cópulas de Lévy; 6. Aplicação a dados reais; 7. Considerações finais; 8. Referências bibliográficas.

---

<sup>†</sup> Artigo recebido em 19/09/2007. Aprovado em 27/11/2007.

\* Parte deste artigo foi desenvolvida durante a estada do autor na *Faculty of Actuarial Science and Statistics* da *Cass Business School, City University*, Londres, Reino Unido. O autor agradece ao Prof. Vladimir Kaishev pela orientação.



## **Abstract**

---

### **A Lévy copula application in the multivariate ruin process aggregation\***

**Eduardo Fraga Lima de Melo**

COPPEAD, UFRJ

eduardoflm@yahoo.com.br

## **Summary**

---

This study produced a simple application of the Lévy copulas concept, initially introduced by Tankov (2003), and generalized by Kallsen and Tankov (2004, 2006), to evaluate a multivariate risk process, or commonly translated in Brazil, a multivariate ruin process. The risk measurement used in this study was the ruin probability in the finite horizon. The processes considered are Poisson compounds, the loss distribution can be from the exponential or sub-exponential class and the dependency structure is modeled through a “Lévy” version of Clayton. For the ruin probability calculation we performed different simulation experiments. An application with real data is also presented. In this application, the parameters are estimated by a version known as IFM (Inference for Margins) method for traditional copulas, in which the margins adjustment is produced separately from the copula adjustment. In order to do so, a brief study about the performance of the Lévy copula maximum Verosimilarity estimation was also produced, through the quadratic average error calculation obtained in simulations.

## **Key Words**

---

Lévy Copulas; Simulation and Inference; Ruin probabilities.

## **Contents**

---

1. Introduction; 2. Lévy multidimensional processes; 3. Modeling of the multivariate risk process; 4. Ruin evaluation probabilities; 5. Inference for Lévy copulas; 6. Real data application; 7. Final considerations; 8. Bibliographical references.

---

\* Part of this article was developed during the permanence of the author at the Faculty of Actuarial Science and Statistics of the Cass Business School, City University, London, United Kingdom. The author thanks Prof. Vladimir Kaishev for the orientation.



Eduardo Fraga Lima de Melo

---

### **Sinopsis**

---

#### **Una aplicación de cópulas de Lévy en la agregación de procesos multivariados de ruina\***

**Eduardo Fraga Lima de Melo**

COPPEAD, UFRJ

[eduardoflm@yahoo.com.br](mailto:eduardoflm@yahoo.com.br)

### **Resumen**

---

En este artículo, es producida una simple aplicación del concepto de cópulas de Lévy, introducido inicialmente por Tankov (2003), y generalizado por Kallsen y Tankov (2004, 2006), para evaluar un proceso multivariado de riesgo o, comúnmente traducido en Brasil, proceso multivariado de ruina. La medida de riesgo utilizada en este estudio ha sido la probabilidad de ruina en el horizonte finito. Los procesos considerados son Poisson compuestos, la distribución de los siniestros puede ser de la clase de las exponenciales o de las subexponenciales y la estructura de dependencia es modelada por una versión "Lévy" de la cópula de Clayton. Para el cálculo de las probabilidades de ruina, ejecutamos diferentes experimentos de simulación. Una aplicación con datos reales también es presentada. En esta aplicación, los parámetros son estimados por una versión del conocido método IFM (Inference for Margins) para cópulas tradicionales, en el cual el ajuste de los márgenes es realizado por separado del ajuste de la cópula. Para tanto, también ha sido realizado un breve estudio sobre el desempeño de la estimación por máxima verosimilitud de cópula de Lévy, a través del cálculo del error medio cuadrático obtenido en simulaciones.

### **Palabras-Clave**

---

Cópulas de Lévy: Simulación e Inferencia; Probabilidades de ruina.

### **Sumario**

---

1. Introducción; 2. Procesos de Lévy multidimensionales; 3. Modelamiento del proceso de riesgo multivariado; 4. Evaluación de las probabilidades de ruina; 5. Inferencia para cópulas de Lévy; 6. Aplicación a datos reales; 7. Consideraciones finales; 8. Referencias bibliográficas.

---

\* Parte de este artículo fue desarrollada durante la estada del autor en la Faculty of Actuarial Science and Statistics de la Cass Business School, City University, Londres, Reino Unido. El autor agradece al Prof. Vladimir Kaishev por la orientación.



## 1. Introdução

Neste artigo, é feita uma simples aplicação do conceito de cópulas de Lévy, primeiramente introduzido por Tankov (2003), e generalizado por Kallsen e Tankov (2004, 2006), para avaliar processos multivariados de risco, ou comumente traduzido no Brasil, como ruína. Como medida de risco, foi escolhida a probabilidade de ruína no horizonte finito. O uso de probabilidades de ruína como medida de risco é muito comum na literatura e no contexto segurador. Os processos considerados são Poisson compostos, deixamos as severidades serem exponencialmente ou subexponencialmente distribuídas, e a estrutura de dependência é modelada por uma versão “Lévy” da cópula de Clayton. Alguns experimentos de simulação foram desenhados e as probabilidades de ruína computadas para o caso bivariado. Também foi feita uma aplicação com dados reais de um portfólio de duas coberturas do seguro residencial/empresarial. Na aplicação, os parâmetros são estimados por uma versão do conhecido método IFM (*Inference for Margins*), no qual o ajuste das margens é feito separado da cópula, adaptado a cópulas de Lévy. Para isto, foi executado um breve estudo sobre a performance da estimação por máxima verossimilhança para estas cópulas por meio do cálculo do erro quadrático médio das simulações.

Em um passado recente, tornou-se comum o uso de cópulas para se modelar a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias. A principal vantagem deste tipo de abordagem é a possibilidade de separar a modelagem das margens da dependência propriamente dita. Apesar de ser uma ferramenta bastante adequada para se lidar com o estudo do comportamento conjunto de variáveis dependentes, cópulas tradicionais apresentam alguns problemas quando aplicadas a processos de Lévy, como veremos.

A estrutura de dependência de um processo de Lévy multidimensional  $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^d)$ , para  $t \geq 0$ , pode ser parametrizada pela cópula  $C_t$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$  para algum  $t \geq 0$ . Porém, essa abordagem tem um número de problemas ou desvantagens. Primeiro, uma vez que a cópula  $C$  depende de  $t$ , a parametrização não é conveniente, pois a estrutura de dependência pode mudar de  $C$  para  $C^*$ , onde  $C$  é diferente de  $C^*$ . Por causa disto, dadas leis de divisibilidade infinita de uma dimensão, não é claro quais cópulas  $C_t$  proverão uma lei infinitamente divisível  $d$ -dimensional. A cópula  $C_t$  pode depender de um momento passado  $s$ , e  $C_t$  para  $t$  diferente de  $s$ , em geral, não pode ser computado de  $C_s$  somente. De forma a computá-la, necessita-se saber as distribuições marginais no tempo  $t$  e no tempo  $s$ . Além disso, sabe-se que cópulas são invariantes sob transformações estritamente crescentes, e como observado em Tankov (2003), divisibilidade infinita não é.

Em um contexto atuarial, o processo de ruína que uma companhia seguradora enfrenta é usualmente caracterizado por um processo Poisson composto, que é um processo de Lévy. Alguns trabalhos na literatura aplicaram com sucesso a abordagem univariada com processos de Lévy para o estudo de probabilidades de ruína em um processo de ruína geral (KLUPPELBERG, KYPRIANOU e MALLER, 2003; MORDECKI, 2003 e 2005). Entretanto, poucos aplicaram processo de Lévy multivariados neste campo. Neste pequeno universo, nos referimos a Bregman e Kluppelberg (2005), em que probabilidades de ruína no tempo infinito foram avaliadas com dependência dada pela cópula Lévy-Clayton.



Lindskog e McNeil (2001) examinaram processos de Poisson com choques comuns para modelar a dependência no contexto de seguro e risco de crédito. Para atingir o objetivo, eles modelaram a dependência na frequência de perdas e a dependência na severidade das perdas. Porém, a dependência no número de sinistros foi modelada separadamente da de severidade.

Neste trabalho, consideramos um portfólio de coberturas, que poderiam ser linhas de negócio, cuja soma representa toda a carteira de uma companhia seguradora ou unidade de negócios. Na maioria das situações, estes processos não deveriam ser considerados independentes, como comumente assumido. Por causa disto, espera-se que a estrutura de dependência influencie a probabilidade de ruína, ou generalizadamente, o risco de todo o portfólio.

No restante do artigo, construiremos e aplicaremos o conceito de cópulas de Lévy para modelagem de processos multivariados de ruína e, para se avaliar o efeito da dependência, utilizaremos como medida de risco a probabilidade de ruína no tempo finito. Assim, na seção 2, introduzimos algumas ferramentas básicas para lidar com processos de Lévy multidimensionais. O processo multivariado de ruína assim como as cópulas de Lévy são introduzidos na seção 3. Na seção 4, experimentos de simulação e seus resultados são apresentados. Na seção 5, a performance do estimador de máxima verossimilhança para cópulas de Lévy é assessada. Na seção 6, provemos uma aplicação com dados reais, e finalmente, na seção 7, concluímos o artigo.

## 2. Processos de Lévy multidimensionais

Nós modelamos a perda de todo o portfólio como um processo de Lévy multivariado,  $S_t$ . Em outras palavras,  $S_t$  tem incrementos estacionários e independentes, e assumimos que seus caminhos amostrais são do tipo *cadlag* (o que em francês significa: contínuo à direita com limites à esquerda).

Baseado nestas características, segue-se que a lei do processo de Lévy  $S_t$  é infinitamente divisível para qualquer tempo  $t$ . De acordo com a representação Lévy-Khinchin, o processo pode ser escrito:

$$E(e^{iz \cdot S_t}) = e^{t \cdot \phi(z)}$$

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}z \cdot A \cdot z + i \cdot \gamma \cdot z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iz \cdot s} - 1 - i \cdot z \cdot s \cdot 1_{|s| \leq 1}) \nu(ds) \quad (1)$$

Para  $z$  e  $a$  pertencentes a  $\mathfrak{R}^d$ ,  $A$  uma matriz  $d \times d$  positiva definida e  $\nu(ds)$  uma medida positiva em  $\mathfrak{R}^{*d}$  (a medida de Lévy), satisfazendo a condição  $\int_{\mathfrak{R}^{*d}} (1 \wedge |s|^2) \nu(ds)$ . O tripleto  $(A, \nu, \gamma)$  é chamado de tripleto característico do processo de Lévy  $S_t$ . A estrutura de dependência é dada pela parte gaussiana, através da matriz de covariância  $A$ , e pela medida de Lévy multivariada  $\nu(ds)$ . A parte de saltos é assumida como independente da parte gaussiana e pode ser notado que a medida de Lévy não depende do tempo  $t$ . Isto sugere que ao se estudar a dependência na medida de Lévy, estamos evitando os problemas das cópulas tradicionais condicionadas no tempo.



Analogamente à abordagem de cópulas tradicionais, a medida de Lévy tem o mesmo papel da distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias. Então, as cópulas de Lévy modelam a dependência entre medidas de Lévy. A diferença é que as medidas de Lévy podem ter um singularidade não integrável em zero. Devido a isto, o domínio das cópulas de Lévy não é em  $[0, 1]^d$ . As cópulas de Lévy para processos com saltos positivos, como os tratados aqui, são funções de  $[0, \infty]^d$  para  $[0, \infty]$ . O papel das distribuições cumulativas é feito pela integral de cauda.

**Definição 1.** Uma integral de cauda d-dimensional é uma função  $U: [0, \infty]^d \rightarrow [0, \infty]$ :

1.  $(-1)^d U$  é um função “d”-crescente.
2.  $U(s_1, \dots, s_k, \dots, s_d) = 0$ , se  $s_k = \infty$  para  $k = 1, \dots, d$ .
3.  $U$  é finito no intervalo  $(0, \infty]$ , exceto no zero.  $U(0, \dots, 0) = \infty$
4. A integral de cauda  $U$  de uma medida de Lévy é:

$$U(s_1, \dots, s_d) = \nu([s_1, \infty[ \times \dots \times [s_d, \infty[) \quad (2)$$

Uma vez definido o conceito de integral de cauda, podemos introduzir a versão do teorema de Sklar para cópulas de Lévy. Basicamente, o teorema mostra como acoplar integrais de cauda multidimensionais às suas margens da mesma forma que cópulas tradicionais juntam a distribuição conjunta às suas margens.

**Teorema 1.** Considerando  $S_t$  um processo de Lévy d-dimensional com saltos positivos tendo integral de cauda  $U$  e integrais de cauda marginais  $U_1, \dots, U_d$ . Existe uma cópula de Lévy d-dimensional positiva que caracteriza a estrutura de dependência de  $S_t$ , ou seja, para todos  $s_1, \dots, s_d$  em  $[0, \infty]$  tal que:

$$U(s_1, \dots, s_d) = F(U_1(s_1), \dots, U_d(s_d)) = F(u_1, \dots, u_d) \quad (3)$$

Se  $U_1, \dots, U_d$  são contínuos, esta cópula de Lévy é única. Por outro lado, é única em  $\text{Int}U_1 \times \dots \times \text{Int}U_d$ , o produto dos intervalos das integrais de cauda unidimensionais. Da mesma forma, considerando  $S_t$  um processo de Lévy d-dimensional com saltos positivos tendo integrais de cauda  $U_1, \dots, U_d$  e  $F$  uma cópula de Lévy d-dimensional positiva. Então, existe um processo de Lévy d-dimensional com cópula de Lévy  $F$  e integrais de cauda marginais  $U_1, \dots, U_d$ . Sua integral de cauda é dada pela equação (3).

**Prova.** Ver capítulo 5 de Cont e Tankov (2004).

A medida de Lévy para processos de Poisson compostos é dada por<sup>1</sup>:

$$\nu(ds) = \lambda f(s) ds,$$

<sup>1</sup> A medida de Lévy é derivada pela representação de Levy-Khinchin.



onde  $f(\cdot)$  é a densidade da distribuição do valor dos sinistros. A integral desta medida de Lévy em  $[0, \infty]$  é finita e igual a  $\lambda$ , então o processo tem atividade finita e, portanto, variação finita<sup>2</sup>.

Baseado na medida de Lévy, a integral de cauda unidimensional pode ser expressa como:

$$U(s) = \int_s^\infty \nu(dx) = \lambda \cdot \left(1 - \int_0^s f(x)dx\right) = \lambda \cdot (1 - F(s)) \quad (4)$$

onde  $\lambda$  é a intensidade do processo de Poisson  $N$  associado ao processo de Poisson composto. Assim:

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(s) = \lambda$$

Mas, sabemos que  $U(0) = \infty$  conforme Definição 1. Para simulação de dados de uma cópula de Lévy, precisamos revisitar as integrais de cauda sob um enfoque de variáveis aleatórias. Assim, considerando  $U$  a integral de cauda de um processo de Lévy multivariado  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$  e  $U_1, \dots, U_d$  as respectivas integrais de cauda marginais, definimos  $S_i \rightarrow U_i(S_i)$  como a transformada da integral de cauda da medida de Lévy de  $S_i$ . Por sua vez, a medida de Lévy passa a ser encarada como uma função da variável aleatória  $X$ , que representa a severidade dos saltos de um processo de Poisson composto.

### 3. Modelagem do processo de risco multivariado

A estrutura básica do modelo que tratamos neste artigo é a seguinte:

$$R_t = x + P_t - S_t = \sum_{k=1}^d (x^k + P_t^k - S_t^k)$$

onde  $R_t$  representa o processo de ruína,  $x$  é o capital inicial,  $P_t$  é o processo de prêmio, que assumiremos como determinístico como uma função linear do tempo ( $P_t = p \cdot t$ ) e  $S_t$  é o processo de sinistros agregados, que consideramos como um processo de Poisson composto multivariado. O sobrescrito  $k$  refere-se à linha de negócios ou cobertura  $k=1, \dots, d$ . Então:

$$S_t = \sum_{k=1}^d S_t^k = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^{N^k(t)} X_i^k$$

<sup>2</sup> Para se checar se um processo de Lévy tem atividade (variação) finita, deve-se verificar  $\int_{\mathbb{R}^d} \nu(ds) < \infty$  ( $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |s|) \nu(ds) < \infty$ ).



onde  $N^k(t)$  é um processo de Poisson que gera o número de sinistros na linha de negócios  $k$ , para  $k=1, \dots, d$ .  $X^k$  são as severidades dos sinistros para cada linha de negócios  $k$ . De forma a facilitar os cálculos, é comum assumir independência entre os  $X^k$ , para  $i=1, \dots, N^k$ , e entre os  $S_t^k$ . Mantendo a primeira hipótese, trataremos exatamente da dependência entre os processos  $S_t^k$ , que podem ser caracterizados como diferentes linhas de negócio que uma companhia de seguros subscreve. É esperado que a dependência interfira no risco do processo final  $R_t$ . Então, mediremos isto usando a probabilidade de ruína no horizonte finito  $\psi_T(x)$ . Dado um capital inicial  $x \geq 0$ , temos que:  $\psi_T(x) = \Pr(R_t < 0)$  para  $t \in [0, T]$ .

Esta medida de risco está definida para o portfólio todo. Entretanto, pode-se alegar que algumas linhas de negócio subsidiam outras. Neste caso, o segurador poderia se preocupar com a solvência de cada linha de negócio separadamente também. Assim, calculamos as seguintes probabilidades de ruína para cada linha de negócio  $k$ :  $\Psi_T^k(x) = \Pr(R_t^k < 0)$  para  $t \in [0, T]$ .

Uma vez que estamos trabalhando com um processo de Poisson bidimensional composto, o processo  $S_t$  pode ser separado em  $S_t^1$  e  $S_t^2$ . Além disso, cada um desses dois processos pode ser considerado como uma soma de processos independentes e dependentes. Então, o modelo completo pode ser representado por:

$$S_t = \sum_{k=1}^2 S_t^k$$

$$S_t^1 = S_t^{1\perp} + S_t^{1,\parallel 2} \quad (5)$$

$$S_t^2 = S_t^{2\perp} + S_t^{2,\parallel 1}$$

onde  $S_t^{1\perp}$  e  $S_t^{2\perp}$  são independentes de cada um e independentes dos outros processos.  $S_t^{i,\parallel j}$  é parte do processo  $S^i$  que é dependente do processo  $S^j$ .  $S_t^{1,\parallel 2}$  tem a mesma intensidade e salta ao mesmo tempo que  $S_t^{2,\parallel 1}$ . Para avaliar este processo de Poisson composto com o uso de cópulas de Lévy, devemos especificar duas coisas: (i) as margens, pela intensidade e distribuição do tamanho dos saltos de  $S_t^k$ , para  $k=1, 2$ , e (ii) a estrutura de dependência pela cópula de Lévy do processo multidimensional.

Considere  $F$  a cópula de Lévy e  $U_1$  e  $U_2$  as integrais de cauda de  $S^1$  e  $S^2$ , respectivamente. As intensidades de  $S^1$  e  $S^2$  são:

$$\lambda_k = \lim_{s \rightarrow 0} U_k(s)$$

Para  $k=1, 2$ . A integral de cauda bidimensional é denotado por  $U_{i,j}(s_i, s_j)$ , para  $i$  diferente de  $j$ . Então, a intensidade do processo  $S_t = \sum_{k=1}^2 S_t^k$  é igual a:





$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{s_1, s_2 \rightarrow 0} \left( U_1(s_1) + U_2(s_2) - U_{1,2}(s_1, s_2) \right) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 - F(\lambda_1, \lambda_2)\end{aligned}$$

Uma vez que os limites para a cópula de Lévy são 0 e  $\min(s_1, s_2)$  (CONT e TANKOV, 2004), a intensidade está sempre contida entre  $\max(\lambda_1, \lambda_2)$  (dependência completa) e  $(\lambda_1 + \lambda_2)$  (independência). As intensidades dos processos de Poisson compostos são:

$$\lambda^{i,||j} = \lambda^{j,||i} = F(\lambda_i, \lambda_j)$$

Para  $i, j=1, 2$  e  $i$  diferente de  $j$ . E as intensidades dos processos independentes:

$$\lambda^{1\perp} = \lambda^1 - \lambda^{1,||2}$$

$$\lambda^{2\perp} = \lambda^2 - \lambda^{1,||2}$$

Neste artigo, para a modelagem da estrutura de dependência, consideramos a cópula de Lévy do tipo Clayton. Para construir Lévy cópulas positivas, Cont e Tankov (2004) sugerem que se for encontrada uma função estritamente decrescente  $\phi(x)$  de  $[0, \infty]$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\phi(0) = \infty$  e  $\phi(\infty) = 0$ , então  $F(x, y) = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y))$  define uma cópula de Lévy positiva. Se estendermos isto para o contexto d-dimensional, tem-se pra a cópula Clayton-Lévy:

$$\phi(x) = x^{-\theta}$$

$$\theta > 0$$

$$F^{Clayton}(x_1, \dots, x_d) = \left( \sum_{j=1}^d x_j^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (6)$$

De acordo com Barndorff-Nielsen e Lindner (2004), a cópula Clayton-Lévy é homogênea, pois é fácil observar que:

$$F(x, y) = t \cdot F(x/t, y/t)$$

Outras funções geradoras podem ser usadas para a criação de cópulas de Lévy, tais como:

$$\phi(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$\phi(x) = e^{\eta x^{-\theta}} - 1$$



para  $\eta > 0$  e  $\phi > 0$ . A primeira função geradora foi introduzida em Tankov (2003) e Cont e Tankov (2004). Porém, ambos geradores produzem cópulas de Lévy que não são homogêneas.

Para simular integrais de cauda de uma cópula Clayton-Lévy, precisamos avaliar suas derivadas parciais e computar a cópula de Lévy condicional. Para  $d = 2$ , temos as seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial x} F^{Clayton}(x, y) = F_x^{Clayton}(y | x) = \left( \frac{x^{-\theta} + y^{-\theta}}{x^{-\theta}} \right)^{-\frac{1}{\theta}-1} \quad (7)$$

A “densidade” é denotada por:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F^{Clayton}(x, y) = (\theta + 1)(xy)^{-\theta-1} \left( x^{-\theta} + y^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}-2} \quad (8)$$

Uma vez introduzidos os processos estocásticos e a cópula de Lévy considerada, podemos definir e derivar o índice de dependência inferior de cauda ( $\delta_L$ ) de acordo com a seguinte Definição 2 e Lema 1 abaixo.

**Definição 2.** Considerando a cópula de Lévy  $F$ , o índice de dependência inferior de cauda ( $\delta_L$ ) é dado por:

$$\delta_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(u, u)}{u} \quad (9)$$

**Lema 1.** O índice de dependência inferior de cauda de uma cópula Clayton-Lévy é dado por:  $2^{-1/\theta}$ .

**Prova.** Da equação (9):

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{[u^{-\theta} + u^{-\theta}]^{-\frac{1}{\theta}}}{u} = 2^{-\frac{1}{\theta}} \quad \diamond$$

Para a simulação de cópulas de Lévy, necessita-se inverter a função (7) separando o termo  $y$ . Para (7), esta tarefa é bastante direta:

$$F_x^{-1}(w|x) = x \left( w^{-\frac{\theta}{1+\theta}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (10)$$



O algoritmo para simulação das integrais de cauda com dependência dada por uma cópula de Lévy-Clayton tem os seguintes passos:

(i)  $i = 1$

(ii) Enquanto  $\Gamma_i^1 < \lambda^{1,1/2}$ :

$i = i + 1$

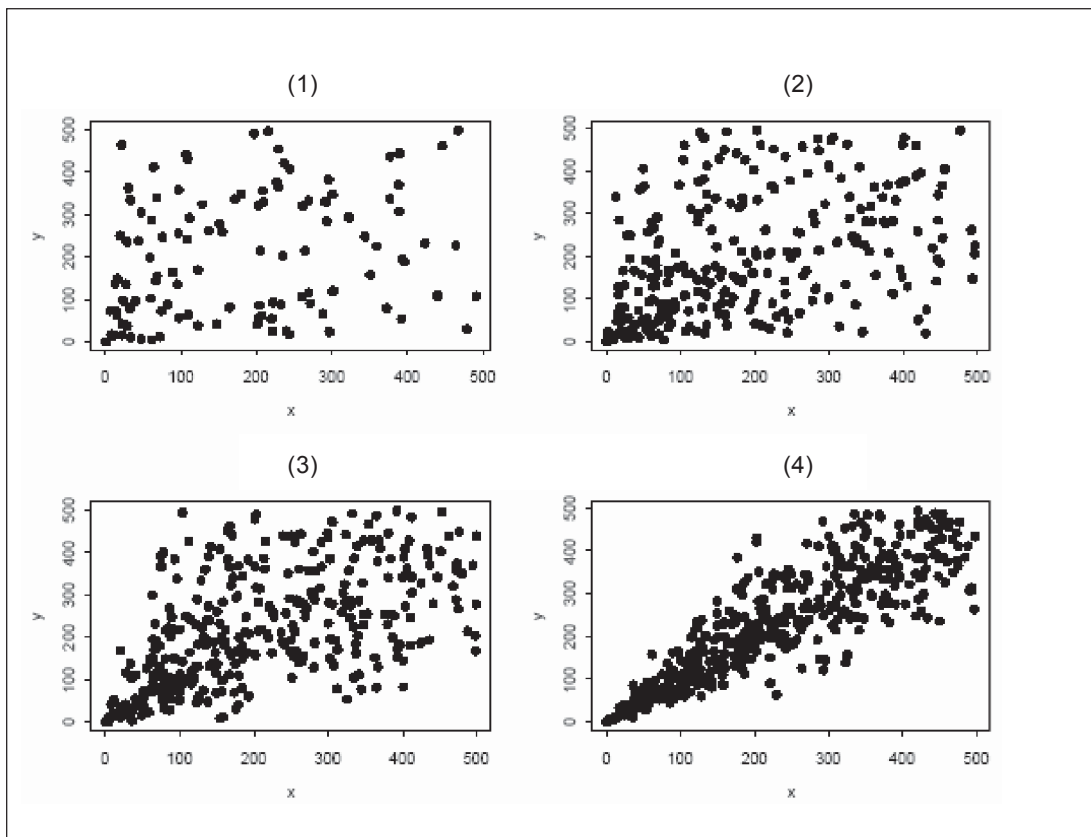
Simula  $T_i$  de uma distribuição exponencial padrão

$\Gamma_i^1 = \Gamma_{i-1}^1 + T_i$

Simula  $\Gamma_i^2$  da distribuição  $F_x^{Clayton}(y | x = \Gamma_i^1)$

Abaixo, apresentamos 500 pontos bivariados  $(\Gamma^1, \Gamma^2)$  simulados para a cópula Clayton-Lévy com diferentes parâmetros  $\theta$ . Os gráficos foram truncados no quadrado  $[0, 500]^2$ . Como pode ser observado nos gráficos, diferentes valores de parâmetro levam a diferentes forças de dependência.

**Figura 1** – Gráfico dos 500 pontos simulados de uma cópula Clayton-Lévy com diferentes parâmetros  $\theta$ : 0.5 (1), 1.0 (2), 2.0 (3) e 5.0 (4)





#### 4. Avaliação das probabilidades de ruína

Nesta seção, reportamos os resultados dos experimentos de simulação executados para avaliar probabilidades de ruína no horizonte finito de um portfólio com duas linhas de negócios. Para isto, consideramos a cópula de Lévy-Clayton, dois tamanhos de portfólio, um pequeno e um médio, três horizontes diferentes (1, 5 e 10 anos), duas distribuições de severidade (Log-Normal e Gamma) e, finalmente, quatro diferentes níveis de dependência. Para cada experimento, foram executadas 5.000 simulações. O capital inicial  $x$  ( $x = \sum_{k=1}^2 x^k$ ) foi assumido como sendo 70% do prêmio puro. Todos os cálculos e geração dos dados fizeram uso do pacote estatístico  $R$  (de distribuição gratuita) rodando em uma plataforma Windows.

Nós fixamos  $\theta = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ . Isto totalizou 48 experimentos de simulação. Como dito anteriormente, o processo de prêmio foi considerado determinístico, linear no tempo e igual ao prêmio puro das duas linhas de negócio (LOBs). Então:

$$P_t = pt = \sum_{k=1}^2 p^k t = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \cdot E[X^k] = (\lambda_1 \cdot E[X^1] + \lambda_2 \cdot E[X^2]) \cdot t$$

O portfólio de tamanho “pequeno” consiste de dois processos de Poisson compostos com intensidades 50 e 150. O portfólio “médio” tem dois processos de Poisson compostos com intensidades 250 e 300. Os parâmetros das distribuições de severidades são escolhidos de tal forma que:

**Tabela 1** – Momentos das distribuições de severidade em unidades monetárias para cada linha de negócio (LOB)

	LOB 1	LOB 2
Média	3.000	2.000
Desvio-Padrão	9.500	3.500

Para simulação dos dois processos de sinistros, primeiro simulamos dois processos independentes  $S_t^{1,1}$  e  $S_t^{2,1}$ , e adicionamos os processos  $S_t^{1,2}$  e  $S_t^{2,1}$ . A simulação destes dois processos de Poisson compostos seguiu:

$$S_t^{1,2} = \sum_{i=1}^{\infty} U_1^{(-1)}(\Gamma_i) 1_{[0,t]}(V_i)$$

$$S_t^{2,1} = \sum_{i=1}^{\infty} U_2^{(-1)}(F_x^{-1}(W_i|\Gamma_i)) 1_{[0,t]}(V_i)$$



onde  $W$  e  $V$  são sequências independentes de variáveis uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$ ,  $\Gamma$  é uma seqüência de tempos de saltos de um processo de Poisson padrão e  $I_{[0,t]}(V_i)$  é uma função indicadora de que  $V_i$  pertence ao intervalo  $[0, t]$ . O algoritmo é apresentado em Cont e Tankov (2004). Na Tabela 2, mostramos os resultados para os portfólios “pequeno” e “médio” para os três horizontes.

**Tabela 2** – Cópula Lévy-Clayton. Probabilidades de ruína para LOB1, LOB2 e a (soma) das LOBs. Severidades dadas pelas distribuições Log-Normal e Gamma Portfólios de tamanho pequeno e médio. Primeiro painel: horizonte de 1 ano. Segundo painel: 5 anos. Terceiro painel: 10 anos

$\theta$	LogNormal		Gamma	
	Portfólio Pequeno	Portfólio Médio	Portfólio Pequeno	Portfólio Médio
0.5	0.1220, 0.0006 (0.0078)	0.0090, 0.0000 (0.0010)	0.0858, 0.0000 (0.0016)	0.0022, 0.0000 (0.0000)
1.0	0.1194, 0.0010 (0.0096)	0.0094, 0.0000 (0.0012)	0.0796, 0.0004 (0.0048)	0.0034, 0.0000 (0.0000)
2.0	0.1266, 0.0010 (0.0122)	0.0106, 0.0002 (0.0028)	0.0740, 0.0003 (0.0102)	0.0038, 0.0000 (0.0002)
5.0	0.1158, 0.0014 (0.0140)	0.0098, 0.0002 (0.0032)	0.0786, 0.0004 (0.0101)	0.0014, 0.0001 (0.0004)
2º Painel				
0.5	0.4224, 0.0122 (0.0538)	0.1308, 0.0000 (0.0110)	0.3420, 0.0082 (0.0472)	0.1146, 0.0000 (0.0026)
1.0	0.4286, 0.0146 (0.0894)	0.1272, 0.0006 (0.0112)	0.3432, 0.0132 (0.0872)	0.1146, 0.0000 (0.0092)
2.0	0.4338, 0.0358 (0.1228)	0.1324, 0.0010 (0.0280)	0.3436, 0.0372 (0.1202)	0.1184, 0.0014 (0.0276)
5.0	0.4308, 0.0499 (0.1548)	0.1310, 0.0068 (0.0489)	0.3380, 0.0510 (0.1408)	0.1160, 0.0073 (0.0483)
3º Painel				
0.5	0.5692, 0.0246 (0.0976)	0.2725, 0.0002 (0.0158)	0.4836, 0.0198 (0.0982)	0.2286, 0.0000 (0.0090)
1.0	0.5700, 0.0354 (0.1552)	0.2755, 0.0004 (0.0218)	0.4682, 0.0328 (0.1268)	0.2454, 0.0003 (0.0217)
2.0	0.5710, 0.0874 (0.2420)	0.2910, 0.0046 (0.0898)	0.4760, 0.0950 (0.2130)	0.2464, 0.0050 (0.0785)
5.0	0.5684, 0.1366 (0.2906)	0.2783, 0.0476 (0.1462)	0.4848, 0.1418 (0.2522)	0.2370, 0.0480 (0.1270)

Baseados nos resultados de simulação obtidos para a cópula Lévy-Clayton, podemos observar um efeito importante da estrutura de dependência na probabilidade de ruína. Como esperado, o portfólio se torna mais arriscado mais dependentes são as duas linhas de negócios. A diferença é ainda mais clara quando o experimento de simulação foi feito com o portfólio “médio”. Devido a uma cauda mais fina, o processo de Poisson composto com severidade Gamma (uma distribuição exponencial) apresenta uma probabilidade de ruína menor na maioria dos casos. O uso de distribuições sub-exponenciais para a severidade provê, em geral, medidas de risco mais conservadoras, como a probabilidade de ruína.

## 5. Inferência para cópulas de Lévy

Para aplicação com dados reais, nós propomos e utilizamos uma versão da estimação por máxima verossimilhança para cópulas de Lévy. Mas, devido à falta de estudos no campo de inferência para cópulas de Lévy, antes das aplicações, nós executamos alguns experimentos de simulação para avaliar a eficiência deste estimador através do erro médio quadrático das simulações. Mendes, Melo e Nelsen (2007) utilizaram este procedimento para comparar a performance de vários estimadores, clássicos e robustos, para diferentes cópulas tradicionais.



Para cópulas tradicionais, o ajuste do modelo pode ser feito no contexto de observações independentes e identicamente distribuídas (iid) pela aplicação do método IFM (Inference for Margins), introduzido por Joe e Xu (1996), onde o método de máxima verossimilhança é aplicado para se obter as estimativas dos parâmetros das marginais e da cópula. Joe (1997) argumenta que podemos esperar que o método IFM seja bastante eficiente, uma vez que é totalmente baseado na estimação por máxima verossimilhança. Eficiência relativa entre as estimativas pode ser assessada tanto pela comparação das matrizes de covariância assintóticas, quanto pela comparação de seus erros quadráticos médios das simulações. O sucesso do procedimento de estimação começa com o bom ajuste das marginais (veja FRAHM, JUNKER e SCHMIDT, 2004), o que tipicamente não é uma tarefa complicada. Resta, então, ajustar a cópula aos dados d-variados com as margens transformadas em “integrals de cauda” para o caso de cópulas de Lévy.

Quando analise-se dados, assume-se que a verdadeira cópula pertence à família paramétrica  $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ . Nesta seção, assumimos que as marginais já foram adequadamente ajustadas e os dados transformados para pseudo-valores de integral de cauda. Assim, nos concentramos na investigação dos estimadores da família da cópula de Lévy-Clayton.

Considere  $\theta$  o parâmetro (ou vetor de parâmetros) e  $\Theta$  os espaço paramétrico. Para uma cópula de Lévy bivariada, o logaritmo da função de verossimilhança,  $L_i(\theta, (u_{1i}, u_{2i}))$ , aplicado para observação  $(u_{1i}, u_{2i})$ , pode ser denotado por:

$$L_i(\theta, (u_1, u_2)) = \log \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F^{Clayton}(u_{1i}, u_{2i})$$

Dado que  $SS$  é o tamanho da amostra  $\{(u_{1i}, u_{2i}), i = 1, \dots, SS\}$ , o log da função de verossimilhança total é:

$$L(\theta, (u_1, u_2)) = \sum_{i=1}^{SS} \log \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F^{Clayton}(u_{1i}, u_{2i})$$

Então, o estimador de máxima verossimilhança ( $\hat{\theta}$ ) satisfaz:

$$L(\hat{\theta}, (u_1, u_2)) \geq L(\theta, (u_1, u_2)) \quad \forall \theta \in \Theta \quad (11)$$

Para os experimentos, nós simulamos uma amostra de integrals de cauda da cópula de Lévy com parâmetro  $\theta$  e para cada simulação, computamos as estimativas, de acordo com (11), reportamos sua média e desvio padrão assim como o erro quadrático médio. Novamente, estabelecemos  $\theta = 0.5, 1.0, 2.0$  e  $5.0$ . Dois tamanhos amostrais (100 e 500) foram considerados, adicionando um total de 8 experimentos. O número de repetições para cada um foi de 1.000.



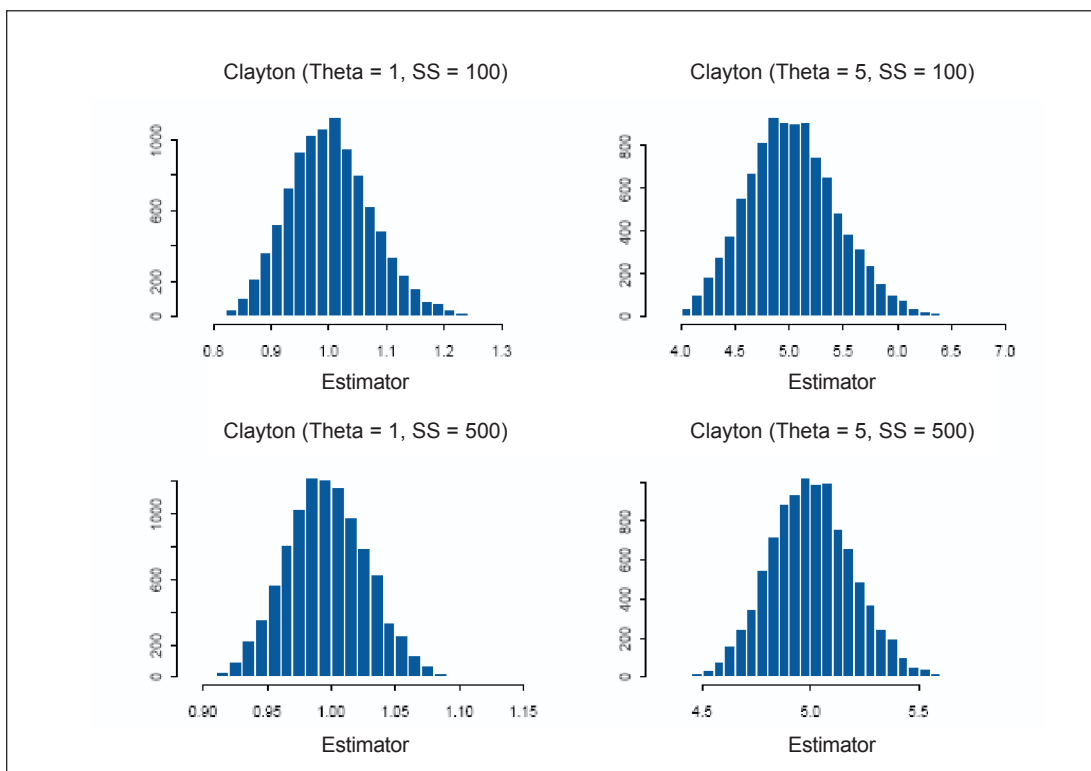
Eduardo Fraga Lima de Melo

**Tabela 3** – Média, desvio padrão e erro quadrático médio (MSE) das estimativas calculadas pelas 1.000 simulações. Tamanho de amostra (SS) = 100 e 500.  $\theta$  é a média das estimativas e  $\sigma$  o desvio padrão

$\theta$	SS = 100			SS = 500		
	$\bar{\theta}$	$\sigma$	MSE	$\hat{\theta}$	$\sigma$	MSE
0.5	0.5023	0.0297	0.0009	0.5005	0.0127	0.0002
1.0	1.0069	0.0740	0.0055	1.0009	0.0323	0.0010
2.0	2.0103	0.1668	0.0279	2.0021	0.0718	0.0052
5.0	5.0392	0.4255	0.1830	5.0044	0.1953	0.0382

De forma geral, é observada a boa performance do estimador de máxima verossimilhança para a cópula Clayton-Lévy copula. Como esperado, acurácia e precisão aumentam com o tamanho da amostra. A precisão também está diretamente relacionada ao nível/força de dependência. A Figura 2 mostra os histogramas das estimativas para  $\theta = 1.0$  e 5.0 e para ambos tamanhos de amostra.

**Figura 2** – Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança para a cópula Clayton-Lévy. Verdadeiro  $\theta = 1.0$  e 5.0. Tamanhos amostrais (SS) = 100 e 500



## 6. Aplicação a dados reais

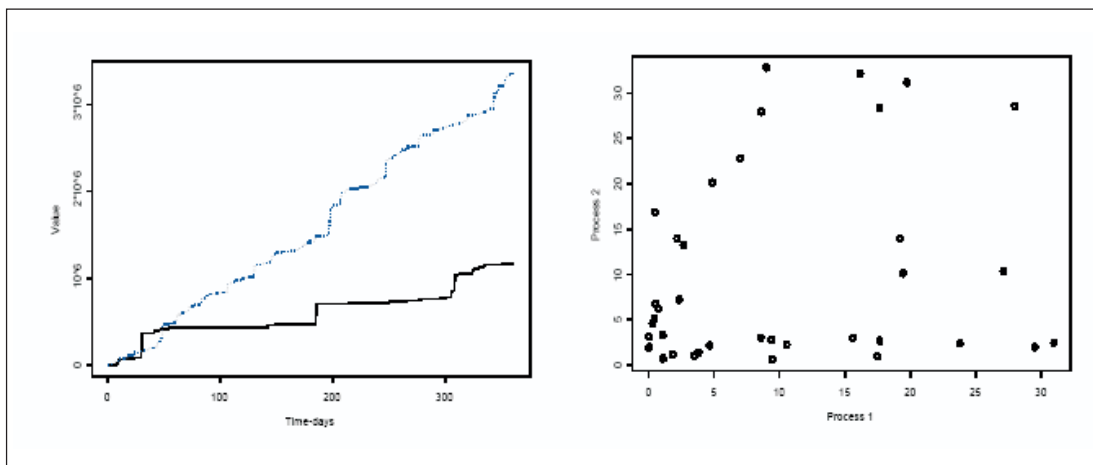
Nesta seção, aplicamos a metodologia proposta para estimar a probabilidade de ruína de um portfólio real de duas diferentes coberturas do seguro residencial/empresarial. O conjunto de dados é de uma companhia seguradora brasileira e consiste de todos os sinistros incorridos por cada dia do ano de 2003. As coberturas são: (i) dano elétrico (DE) e (ii) fogo, explosão (FE). A Tabela 4 resume os dois processos.

**Tabela 4** – Resumo dos dois processos: DE e FE

	DE	FE
Intensidade ( $\lambda$ )	330	712
Severidade		
Media	3,533	4,726
Desvio Padrao	12,702	12,048
Assimetria	9.56	5.96
Curtose	102	44

Na Figura 3 (lado esquerdo), apresentamos o comportamento dos dois processos para cada cobertura durante o ano de 2003. A escala temporal está em dias. Para a severidade, testamos ambas as distribuições Gamma e Log-Normal, ajustadas por máxima verossimilhança. Os melhores ajustes foram dados pela distribuição Log-Normal para os dois processos baseados no critério de AIC. Os números observados de sinistros foram considerados como as respectivas intensidades. Os dados transformados em integrais de cauda mostraram alguma evidência de dependência caudal inferior, que pode ser observada na Figura 3 (lado direito).

**Figura 3** – Esquerda: Processos dos sinistros das duas linhas de negócios durante o ano de 2003. Direita: Gráfico de dispersão das integrais de cauda dos processos das duas linhas de negócios







A estimativa do parâmetro para esta amostra usando a cópula Lévy-Clayton e o procedimento de estimação descrito na seção anterior foi  $\theta = 0.82$ . Assim, considerando esta cópula, computamos a probabilidade de ruína do portfólio bivariado para o horizonte de 5 anos por meio do uso de simulações com um processo determinístico para o prêmio, linear no tempo, dado pela quantia de prêmio puro e o capital inicial equivalente a 70% do prêmio puro anual. A probabilidade de ruína para este conjunto de parâmetros, com a modelagem da estrutura de dependência, foi de 0.0101. Se assumirmos independência entre dois portfólios ( $\theta = 0$ ), a probabilidade de ruína seria subestimada por 0.0036.

## 7. Considerações finais

Neste artigo, aplicamos o conceito de cópulas de Lévy, primeiramente introduzido por Tankov (2003), e generalizado por Kallsen e Tankov (2004, 2006), para avaliar um processo multivariado de ruína de uma companhia seguradora por meio de sua probabilidade de ruína no horizonte finito. Os processos considerados foram Poisson compostos, deixamos as distribuições de severidade serem exponenciais (Gamma) e subexponenciais (Log-Normal), e a estrutura de dependência é modelada pela versão Lévy da cópula de Clayton. Experimentos de simulação foram desenhados e as probabilidades de ruína computadas para diferentes horizontes de tempo. Nós também fizemos uma aplicação com dados reais de um seguro residencial/empresarial com 2 coberturas. Os parâmetros foram estimados por uma versão Lévy do conhecido método IFM, onde o ajuste das margens é feito separado do ajuste da cópula.

Como principais resultados dos experimentos, pudemos observar um efeito da especificação da dependência na probabilidade de ruína, que foi a medida de risco escolhida. O portfólio se torna mais arriscado quanto mais dependentes forem as duas linhas de negócios. A diferença é ainda mais clara quando simulamos de portfólios maiores. Por causa do efeito da soma de riscos, o portfólio “médio” apresentou de forma geral e relativa um risco menor que o portfólio “pequeno”. Devido a uma cauda mais fina, os processos de Poisson com severidades Gamma apresentam probabilidades de ruína menores. O uso de distribuições subexponenciais para a severidade, como a Log-Normal, acarreta maiores medidas de risco.

Antes da aplicação com dados reais, também executamos um breve estudo sobre a performance do método de estimação por máxima verossimilhança para cópulas Lévy-Clayton. Por meio do cálculo do erro quadrático médio das simulações, pudemos assessorar a performance dos estimadores. Para isto, consideramos que as marginais foram adequadamente ajustadas. Baseado nos resultados apresentados na Tabela 3, pudemos ficar confiantes na acurácia e eficiência do estimador de máxima verossimilhança para ser aplicado aos dados reais.

Na aplicação a dados reais de um seguro residencial/empresarial com duas coberturas, pudemos observar os efeitos da hipótese de independência na estimação de probabilidades de ruína quando os dados indicam a presença de alguma dependência. Apólices de seguro



com muitas coberturas, como as de compreensivos, podem ser as mais sensíveis para a hipótese de independência, uma vez que muitos acidentes podem resultar em sinistros de diferentes coberturas.

Muita pesquisa ainda deve ser feita nesta área, mas os resultados obtidos neste artigo mostram que o uso de cópulas de Lévy no contexto de seguros é uma ferramenta muito importante para o estudo do risco de portfólios de companhias seguradoras. As consequências da modelagem da dependência em processos de ruína, na gestão de riscos, na constituição de reservas, avaliação de capital entre outros podem ser muito maiores do que se pode imaginar.

## 8. Referências bibliográficas

- Barndorff-Nielsen, O.E. e Lindner, A. (2004). **Some aspects of Levy copulas**. Disponível para download em [www-m4.ma.tum.de/pers/lindner/lecop.pdf](http://www-m4.ma.tum.de/pers/lindner/lecop.pdf).
- Bregman, Y. e Kluppelberg, C. (2005). **Ruin estimation in multivariate models with Clayton dependence structure**. *Scandinavian Actuarial Journal* 6, p.462-80.
- Cont, R. e Tankov, P. (2004). **Financial modelling with jump processes**. Chapman & Hall/CRC financial mathematics series.
- Frahm, G., Junker, M., e Schmidt, R. (2004). **Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and Pitfalls**. *Mathematical Methods of Operations Research*, V. 55, N. 2, 301-327.
- Joe, H. (1997). **Multivariate models and dependence concepts**. Chapman & Hall, London.
- Joe, H. e Xu, J. (1996). **The estimation method of inference function for margins for multivariate models**. Technical Report no.166. Vancouver: Univ. of British Columbia, Dept. of Statistics.
- Kallsen, J. e Tankov, P. (2004). **Characterization of dependence of multidimensional Levy processes using Levy copulas**. Preprint, disponível em [www.cmap.polytechnique.fr/~tankov](http://www.cmap.polytechnique.fr/~tankov).
- Kallsen, J. e Tankov, P. (2006). **Characterization of dependence of multidimensional Levy processes using Levy copulas**. *Journal of Multivariate Analysis*, 97, p.1551-72.
- Kluppelberg, C., Kyprianou, A.E. e Maller, R.A. (2003). **Ruin probabilities and overshoots for general Levy insurance risk processes**. *Annals of Applied Probability* (14), p.1766-1801.
- Lindskog, F. e McNeil, A.J. (2001). **Common Poisson Shock Models: applications to insurance and credit risk modelling**. Working paper. Download de [www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/ftp/CommonPoissonShockModels.pdf](http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/ftp/CommonPoissonShockModels.pdf).
- Mendes, B.V.M., Melo, E.F.L., e Nelsen, R.B. (2007). **Robust fits for copula models**. *Communication in Statistics* 36, pp.997-1017.
- Mordecki, E. (2003). **Ruin probabilities for Levy processes with mixed-exponential negative jumps**. *Theory of Probability and its Applications* 48(1), pp.170-176.
- Mordecki, E. (2005). **Levy Processes in Finance and Insurance**. Notas de curso ministrado no *Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*.
- Tankov, P. (2003). **Dependence structure of spectrally positive multidimensional Levy processes**. Download de [www.cmap.polytechnique.fr/~tankov](http://www.cmap.polytechnique.fr/~tankov).