



---

## Graduação Bayesiana de Taxas de Mortalidade: Uma Aplicação na Cobertura de Sobrevivência e na Avaliação da Provisão Matemática

### **César da Rocha Neves**

Mestre em Ciências em Engenharia de Produção – Área de concentração:  
Pesquisa Operacional pela COPPE/UFRJ;  
Pós-graduado em Engenharia Econômica e Financeira pela Universidade Federal Fluminense – UFF;  
Graduado em Ciências Atuariais pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ;  
Coordenador da Gerência Técnica de Estudos Atuariais do Departamento Técnico Actuarial da Superintendência de Seguros Privados – SUSEP.  
[cneves@susep.gov.br](mailto:cneves@susep.gov.br)

### **Hélio dos Santos Migon**

Ph.D. em Estatística pela Warwick University, 1984;  
Professor Titular do Departamento de Métodos Estatísticos – IM/UFRJ e da COPPE/UFRJ.  
[migon@im.ufrj.br](mailto:migon@im.ufrj.br)

---

### **Resumo**

Modelos de graduação bayesiana de taxas de mortalidade utilizando simulação estocástica via cadeias de Markov – MCMC são apresentados neste artigo. As probabilidades de morte anuais graduadas são estimadas por meio da distribuição preditiva do número de mortes, o qual é modelado como sendo Poisson distribuído, considerando que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com a mesma probabilidade. A elaboração de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas é realizada por meio de modelos bayesianos dinâmicos e a tábua de melhor ajuste é comparada com tábuas de mortalidade conhecidas e utilizadas no mercado. Cálculos de provisões, por meio de MCMC, fazendo uso de conceitos de valor em risco são exemplificados, demonstrando a importância da adequação da tábua de mortalidade na cobertura de sobrevivência à real mortalidade da população exposta ao risco.

### **Abstract**

---

#### **Mortality rates bayesian graduation: application to insurance coverage of survival rate and the assessment of mathematical provisions**

César da Rocha Neves, MSc in Production Engineering – Focus Area: Operational Research with COPPE/UFRJ; Post-graduate in Economic and Financial Engineering from Universidade Federal Fluminense – UFF; Bachelor in Actuary Sciences from the Federal University of Rio de Janeiro – UFRJ; Managing Co-ordinator of Technical Actuary Studies, Technical Actuary Dept. of the Superintendence for Private Insurance – SUSEP  
[cneves@susep.gov.br](mailto:cneves@susep.gov.br)

Hélio dos Santos Migon, Ph.D. in Statistics from Warwick University, 1984; Head Professor at the Statistical Methods Department – IM/UFRJ and COPPE/UFRJ  
[migon@im.ufrj.br](mailto:migon@im.ufrj.br)



---

This paper presents Bayesian graduation models of mortality rates, using Markov chain Monte Carlo (MCMC) techniques. Graduated annual death probabilities are estimated through the predictive distribution of the number of deaths, which is assumed to follow a Poisson process, considering that all individuals in the same age class die independently and with the same probability. The resulting mortality tables are formulated through dynamic Bayesian models. The best such mortality table is then compared with known tables from abroad used by the market in Brazil. Calculation of adequate reserve is exemplified, via MCMC, making use of the value at risk concept, demonstrating the importance of using “true” observed mortality figures for the population exposed to risk in determining the survival coverage rate.

### ***Palavras-Chave***

---

graduação bayesiana; Modelos dinâmicos; Distribuição preditiva; MCMC; Tábua biométrica de mortalidade; Provisão matemática; Valor em risco.

### ***Sumário***

---

1. Introdução; 2. Graduação de taxas de mortalidade; 3. Modelos propostos; 3.1. Modelo dinâmico local; 3.2. Modelo dinâmico global; 3.3. Predição das probabilidades de morte; 3.4. Implementação e análise de convergência; 3.5. Seleção de modelos e análise dos resultados; 4. Aplicação: importância da tábua biométrica no cálculo da provisão matemática; 5. Conclusão; 6. Referências bibliográficas.



## 1. Introdução

Os planos de previdência complementar aberta e de seguro de vida que possuam cobertura de sobrevivência necessitam de prévia aprovação para serem comercializados. As seguradoras e entidades abertas de previdência complementar devem fixar as tábuas biométricas de mortalidade e as taxas de juros que serão utilizados em seus planos no momento dessa aprovação. Portanto, as tábuas biométricas são válidas, desde a adesão do primeiro consumidor ao plano, até a morte do último assistido, um longo intervalo de tempo. No decorrer deste artigo, nos referiremos genericamente aos planos como sendo de previdência e denominaremos como seguradoras as empresas que comercializam esta cobertura.

Dentre os problemas enfrentados pelas seguradoras um deles consiste em decidir que tábua biométrica de mortalidade fixar para a cobertura de sobrevivência de seus planos, pois esta deverá ser sempre utilizada para cálculos das contribuições, das rendas e das provisões. Esse problema se agrava em razão da tendência de redução da mortalidade da população e da utilização pelo mercado de tábuas de mortalidade construídas com experiências de outros países, em sua maioria americanas.

A constituição de provisões matemáticas pelas seguradoras, que medem os compromissos futuros destas, é realizada com base nos valores das anuidades, como veremos na Seção 4. Estas são calculadas em função da taxa de juros e das probabilidades de morte. De fato são inversamente proporcionais à taxa de juros e às probabilidades de morte. Assim, para evitar a constituição de provisões matemáticas a menor do que o necessário e a conseqüente insolvência da empresa, devido à falta de conhecimento sobre a mortalidade da população exposta, os atuários das companhias estão deixando de lado a estatística e a atuária e se prevenindo de eventuais perdas com a fixação de taxas de juros reduzidas, na sua maior parte igual a zero. Com isso, espera-se compensar futuros prejuízos técnicos decorrentes do mau dimensionamento das tábuas biométricas de mortalidade, ou seja, utilização de probabilidades de morte superiores à real mortalidade da massa exposta na cobertura de sobrevivência, com ganhos financeiros decorrentes da garantia de uma baixa taxa de juros.

A partir dos dados coletados de todas as seguradoras brasileiras, entre os anos de 1998 e 2001, utilizaremos a estatística bayesiana para elaboração de tábuas biométricas de mortalidade, para ambos os sexos, que reflitam a mortalidade dos expostos ao risco na cobertura de sobrevivência dos planos de previdência no Brasil. Para obtenção das probabilidades de mortes constantes dessas tábuas, será utilizado o processo de graduação bayesiana.

A distribuição dessas quantidades será obtida a partir da distribuição preditiva do número de mortes, o qual é modelado como sendo Poisson distribuído, assumindo-se que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com probabilidades idênticas. A graduação é fundamental para suavizar as taxas brutas de mortalidade, fazendo com que as probabilidades de mortes sejam monotonicamente crescentes em relação às idades, pois é bem sabido que a mortalidade humana assim se comporta a partir de certa idade.

O principal objetivo deste artigo é propor modelos dinâmicos para elaboração de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas. Além disto, a tábua de mortalidade resultante do melhor modelo será comparada com algumas tábuas utilizadas na prática pelo mercado. Demonstraremos, também, a importância da adequação da tábua biométrica de mortalidade, utilizada na cobertura de sobrevivência, à realidade da massa exposta ao risco para que a seguradora mantenha-se solvente. Isto será feito através do cálculo da provisão matemática, comparando o método determinístico, adotado pelo mercado segurador, com o método bayesiano proposto, onde utilizaremos conceitos de valor em risco (*value at risk* – VaR).

Este artigo é organizado como se segue. Os dados utilizados e conceitos de graduação são apresentados na Seção 2. Na Seção 3 são propostos modelos dinâmicos para elaboração de tábuas de mortalidade bayesianas e a tábua obtida pelo modelo mais ajustado é comparada com algumas tábuas biométricas de mortalidade existentes. A importância da adequação de uma tábua biométrica à real mortalidade da população exposta ao risco para que a seguradora mantenha-se solvente é demonstrada na Seção 4, através do cálculo da provisão matemática, por meio de simulação estocástica via cadeias de Markov – MCMC e fazendo uso de conceitos de valor em risco. Finalmente, na Seção 5, apresentamos conclusões e sugestão de extensão deste trabalho.

## 2. Graduação de taxas de mortalidade

Os dados utilizados são referentes aos participantes e assistidos dos planos de previdência no Brasil que possuam a cobertura de sobrevivência, coletados entre os anos de 1998 e 2001. Consideramos estes dados com a seguinte estrutura:  $D_t = (x, e_{x,t}, d_{x,t})$ , onde  $x$  é a idade dos indivíduos em anos,  $e_{x,t}$  é a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x$  no ano  $t$  e  $d_{x,t}$  é o número de mortes observadas na idade  $x$  no ano  $t$ , para  $t = 1, \dots, 4$ , já corrigidos os atrasos de notificação.

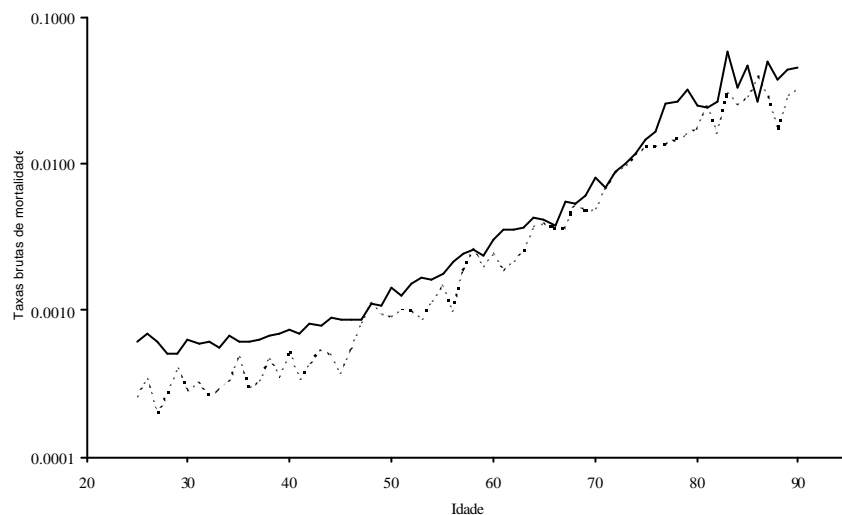
No período de estudo foi observada uma quantidade central de cerca de 5.6 milhões de expostos ao risco no sexo masculino e de 2.9 milhões no sexo feminino, sendo que 94% destes estão na faixa entre 20 e 60 anos. No mesmo período ocorreram cerca de 7.6 mil mortes entre os homens e 2.8 mil entre as mulheres, nas quais a maioria, aproximadamente 97%, ocorreu no intervalo de idade entre 25 e 90 anos (ver Anexo I). A partir

dos dados, calculamos a taxa bruta de mortalidade, denotada por  $r_x$ , para cada classe de idade e sexo:

$$r_x = \frac{\sum_{t=1}^4 d_{x,t}}{\sum_{t=1}^4 e_{x,t}}$$

Espera-se que a taxa de mortalidade tenha um comportamento regular: um indivíduo mais velho deverá ter taxa de mortalidade superior a de um mais jovem. Na prática, todavia, as taxas brutas não se comportam desta forma em relação à idade como se observa na Figura 1. Para que possam ser utilizadas em planos de previdência as taxas deverão ser suavizadas. Este processo de suavização das taxas brutas de mortalidade é denominado por graduação.

**Figura 1:** Taxas brutas de mortalidade por idade, em escala logarítmica, para cobertura de sobrevivência, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).



A graduação, além de corrigir o problema mencionado, presta-se para cuidar da falta de informação para algumas idades estudadas. As taxas brutas são suavizadas obtendo-se probabilidades anuais de mortes ( $q_x$ ) monotonicamente crescentes em relação às idades.

Graduaremos as taxas brutas de mortalidade em função de força de mortalidade, i.é: variação instantânea da intensidade de morte. Assumindo-se que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com mesma probabilidade, então o número

de mortes observadas -  $d_{x,t}$ , em cada ano de estudo e idade, é Poisson distribuído com média  $e_{x,t} \cdot m_{x,t}$ , onde  $m_{x,t}$  é a força de mortalidade na idade  $x$  no tempo  $t$  e  $e_{x,t}$  denota a população exposta ao risco, a qual é suposta conhecida.

Como o objetivo final do processo de graduação é a obtenção das probabilidades anuais de mortes para cada classe de idade e estamos graduando em função da força de mortalidade, consideramos estas constantes em cada intervalo de idade e trabalharemos com a seguinte relação (Gerber, 1997):

$$q_x = 1 - \exp(-m_x) \quad (1)$$

Para estimar taxas de mortalidade suavizadas são sugeridos na literatura modelos de graduação paramétricos e não paramétricos, na nomenclatura de Haberman e Renshaw (1996), ou modelos globais e locais, respectivamente. As graduações normalmente são realizadas através de modelos paramétricos, que chamaremos de modelos globais, por ajuste das probabilidades de morte ou das forças de mortalidade a um modelo matemático. Os modelos matemáticos mais comuns representam funções de sobrevivência fundamentadas em leis de mortalidade, tais como as de Moivre, Gompertz, Makeham e Weibull (Bowers et al., 1986).

No Brasil, os trabalhos realizados sobre graduação de taxa de mortalidade com dados originários do mercado segurador utilizam estatística clássica e modelos globais não preditivos e estáticos. Neste artigo, entretanto, proporemos modelos bayesianos dinâmicos e preditivos, com duas alternativas de modelagem da priori: local e global. A abordagem bayesiana do processo de graduação trata da estimação estatística dos parâmetros desconhecidos, onde são agregados aos dados conhecimentos iniciais (distribuição a priori) sobre os parâmetros estudados. Alguns trabalhos já foram publicados sobre graduação bayesiana, entre eles: Kimeldorf e Jones (1967), Hickman e Miller (1977), Broffit (1988), Carlin (1992), Gordon (1998) e Mendonza et al. (2001).

### 3. Modelos propostos

Uma tábua biométrica de mortalidade é definida como um conjunto de probabilidades de mortes anuais graduadas por idade. Sua construção deve levar em conta um período de estudo superior a um ano. Haberman e Renshaw (1996) e Renshaw e Haberman (2000) utilizam quatro anos e na elaboração de algumas tábuas biométricas disponíveis no mercado foram utilizados até seis anos de dados.

Uma ampla classe de modelos dinâmicos para elaboração de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas será proposta para aplicarmos aos expostos ao risco na cobertura de sobrevivência no Brasil. O modelo apresentado por Broffit (1988)

será estendido para incluir a dimensão temporal. Assim, para descrever a relação entre o número de mortes observadas e as correspondentes idades, usamos o seguinte modelo:

$$d_{x,t} | \mathbf{m}_{x,t} \sim \text{Poisson}(e_{x,t} \cdot \mathbf{m}_{x,t}), \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}}$$

onde:  $t = 1, \dots, T$ , o número de períodos de observação,  $\mathbf{m}_{x,t} > 0$  e  $e_{x,t}$  são constantes conhecidas. Duas alternativas serão usadas na modelagem: local e global.

### 3.1. Modelo dinâmico local

Para modelar a evolução no tempo das forças de mortalidade utilizamos modelos dinâmicos generalizados (West *et al.*, 1985), considerando  $\mathbf{m}_{x,t}$  relacionados através de perturbações multiplicativas:

$$\log(\mathbf{m}_{x,t}) = \log(\mathbf{m}_{x,t-1}) + \mathbf{w}_t, \text{ com} \quad (2)$$

$$\mathbf{w}_t \sim \text{Normal}(0, W_t), \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}} \text{ e } t = 2, \dots, T$$

onde:  $W_t$  é modelado através de uma distribuição Gama Inversa não informativa. Ressaltamos que se  $W_t = 0$  recaímos num modelo estático. Neste caso os dados, ao longo dos anos, são considerados com a mesma relevância, como se fosse uma regressão com replicações em cada faixa etária. O modelo é completado especificando-se distribuições *a priori* Gama não informativas para os parâmetros  $\mathbf{m}_{x,1}$ .

Assim, temos:

$$\mathbf{m}_{x,t} \sim \text{Gamma}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) I_{(\mathbf{m}_{x-1,t}, \mathbf{m}_{x+1,t})}(\mathbf{m}_{x,t}), \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}}$$

onde:  $t = 1$ ,  $I_A(y) = 1$ , se  $y \in A$  e  $I_A(y) = 0$ , se  $y \notin A$ ,  $\mathbf{a} = 0,001$  e  $\mathbf{b} = 0,001$ . Assumimos que estes hiperparâmetros são conhecidos, diferente de Carlin (1992), somente devido a limitações computacionais do WinBUGS (Spiegelhalter *et al.*, 1996).

Vale observar que graduando-se  $\mathbf{m}_{x,1}$ , todos os  $\mathbf{m}_{x,t}$ ,  $\forall t > 1$ , também serão graduados, devido à evolução dos parâmetros (2). Além disto, o Teorema de Bayes assegura que as restrições sobre *a priori* valerão, também, para *a posteriori* (Carlin, 1992), promovendo assim estimadores bayesianos graduados para todas as classes no tempo. Uma aplicação mais recente destes conceitos, no contexto



da estimação de modelos demográficos com restrição nos parâmetros, pode ser vista em McDonald e Prevost (1997).

### 3.2. Modelo dinâmico global

A graduação, neste caso, se dará pelo ajuste das taxas de mortalidade à Lei de Makeham (Bowers et al., 1986), permitindo-se que seus parâmetros evoluam suavemente no tempo:

$$\mathbf{m}_{x,t} = \mathbf{a}_t + \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{d}_t^x, \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}} \text{ e } t = 1, \dots, T.$$

A partir da função de ligação canônica ( $\mathbf{h}_{x,t}$ ) da distribuição Poisson, como nos modelos lineares generalizados dinâmicos, obtemos a estrutura:

$$\mathbf{h}_{x,t} = \log(e_{x,t} \cdot \mathbf{m}_{x,t}) = \log(e_{x,t}) + \log(\mathbf{a}_t + \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{d}_t^x), \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}} \text{ e } t = 1, \dots, T$$

onde:  $\mathbf{m}_{x,t} > 0$  e  $e_{x,t}$  são constantes conhecidas.

A evolução temporal dos parâmetros que compõem a Lei de Makeham é descrita por:

$$\log(\mathbf{a}_t) = \log(\mathbf{a}_{t-1}) + \mathbf{w}a_t$$

$$\log(\mathbf{b}_t) = \log(\mathbf{b}_{t-1}) + \mathbf{w}b_t$$

$$\log(\mathbf{d}_t) = \log(\mathbf{d}_{t-1}) + \mathbf{w}c_t, \quad t = 2, \dots, T$$

onde:  $\mathbf{w}z_t \sim \text{Normal}(0, Wz_t)$ ,  $z = a, b, c$  e  $Wz_t$  são modelados através de distribuições Gamas Inversas não informativas. Novamente modelos estáticos serão um caso particular correspondendo à  $Wa_t = 0$ ,  $Wb_t = 0$  e  $Wc_t = 0$ . O modelo é completado atribuindo-se distribuições *a priori* Normais não informativas para os parâmetros:  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{d}_1$ , satisfazendo as restrições impostas pela Lei de Makeham.

### 3.3. Predição das probabilidades de morte

A distribuição preditiva do número de mortes no tempo  $T + 1$ , onde é previsto o comportamento futuro desta quantidade aleatória observável, incorporando as incertezas associadas aos parâmetros não observáveis ( $\mathbf{m}_{x,t}$ ), é dada por:

$$p(d_{x,T+1} | D_T) = \int_{x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}}} p(d_{x,T+1} | \mathbf{m}_{x,t}, D_T) \cdot p(\mathbf{m}_{x,t} | D_T) d\mathbf{m}_{x,t}, \quad x =$$

(3)

onde:  $\mathbf{m}_{x,t} > 0$ ,  $T$  é o número de períodos de observação e

$D_T = (x, e_{x,T}, d_{x,T})$  representam as informações disponíveis. No contexto de MCMC esta distribuição é de fácil obtenção, bastando replicar a função de verossimilhança.

Baseado no conceito de distribuição preditiva descrito na equação (3), obtemos distribuições preditivas para as probabilidades de morte de cada classe de idade, através da simplificação descrita na equação (1), assumindo que  $e_{x,T+1}$  são constantes conhecidas:

$$q_{x,T+1} = 1 - \exp\left(-\frac{d_{x,T+1}}{e_{x,T+1}}\right), \quad x = x_{\text{inf}}, \dots, x_{\text{sup}}$$

Assim, podemos utilizar como estimador pontual a esperança da distribuição preditiva. Como a distribuição preditiva é avaliada a partir das sequências geradas por MCMC, esta esperança será simplesmente a média dos valores amostrados.

### 3.4. Implementação e análise de convergência

Os modelos propostos são implementados através de MCMC, particularmente o Amostrador de Gibbs, por meio do pacote computacional WinBUGS versão 1.4 (Spiegelhalter *et al.*, 2003). Devido às características dos dados, estimamos as probabilidades de mortes para idades entre 25 e 90 anos ( $x_{\text{inf}} = 25$  e  $x_{\text{sup}} = 90$ ), considerando um período de observação de quatro anos ( $T = 4$ ), entre 1998 e 2001. Vale ressaltar que para algumas dessas idades e anos não há registros de mortes. Estes são tratados facilmente no processo de inferência utilizado neste artigo. Na implementação do amostrador de Gibbs utilizamos três cadeias em paralelo com valores iniciais distintos, com objetivo de evitar que as amostras geradas concentrem-se em regiões em torno de uma moda local, no caso de multimodalidade da posteriori, conforme descrito em Gamerman (1996).

A verificação da convergência é uma etapa importante na aplicação desses métodos. Três técnicas informais de análise gráfica (densidade, função de autocorrelação e “traces”) e a estatística de Gelman-Rubin modificada por Brooks e Gelman (1998), como aplicado por Migon e Moura (2002), são utilizados neste artigo.

Para cada parâmetro geramos uma amostra de tamanho 120.000 observações, através de três cadeias em paralelo, das quais as primeiras 60.000 são descartadas. O tempo de implementação do

modelo dinâmico local, em um PC com 1.8GHz e 512MB de memória RAM, fica em torno de 15 minutos. O modelo dinâmico global é mais intensivo em tempo de processamento (cerca de três vezes maior).

### 3.5. Seleção de modelos e análise dos resultados

A seleção de modelos é uma atividade fundamental na estatística moderna (Gelfand e Ghosh, 1998) em razão dos avanços computacionais que permitem o ajustamento de múltiplos modelos complexos e alternativos.

Três métodos de seleção de modelos serão aplicados aos nossos dados para identificar o modelo mais adequado para elaboração da tábua biométrica de mortalidade. Além do fator de Bayes, calculado a partir do logaritmo da verossimilhança preditiva (LS) de cada modelo estimada pela média harmônica dos valores da verossimilhança (Newton e Raftery, 1994), outros dois métodos são utilizados. Estes critérios consideram simultaneamente o ajuste aos dados observados e a predição de dados replicados e são: EPD (Expected Predictive Deviance), proposto por Gelfand e Ghosh (1998); DIC (Deviance Information Criterion), desenvolvido por Spiegelhalter et al. (2002). Podemos analisar, na Tabela 1, os resultados obtidos pelos métodos de comparação entre os modelos propostos.

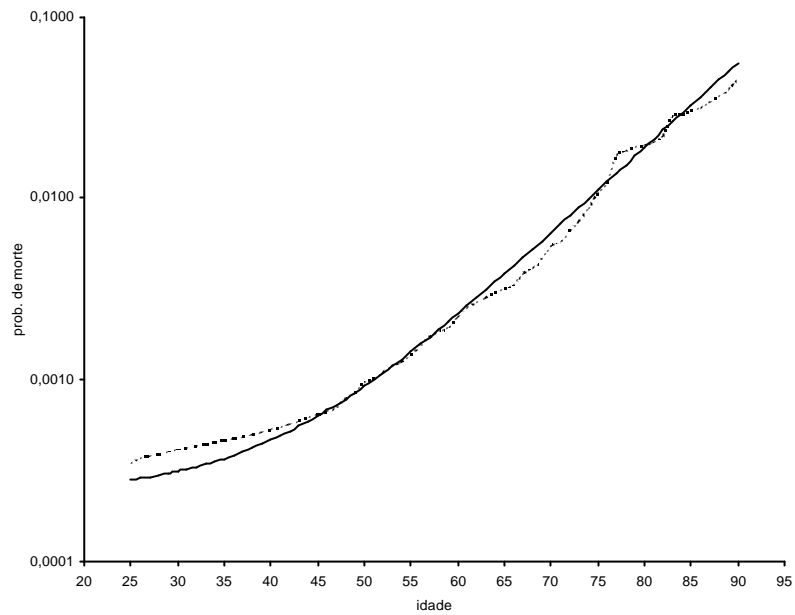
**Tabela 1:** Resultados das medidas de comparação entre os modelos propostos, para ambos os sexos

Modelos	Sexo Masculino						LS
	EPD			DIC			
	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	
dinâmico local	30.500,00	8.123,47	38.623,47	2.170,69	24,22	2.194,92	-1.130,87
dinâmico global	20.940,00	7.672,98	<b>28.612,98</b>	1.782,85	7,38	<b>1.790,23</b>	<b>-905,33</b>
Modelos	Sexo Feminino						LS
	EPD			DIC			
	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	
dinâmico local	9.379,00	2.959,46	12.338,46	1.652,58	19,54	1.672,12	-872,87
dinâmico global	7.087,00	2.818,47	<b>9.905,47</b>	1.411,31	8,34	<b>1.419,64</b>	-733,46

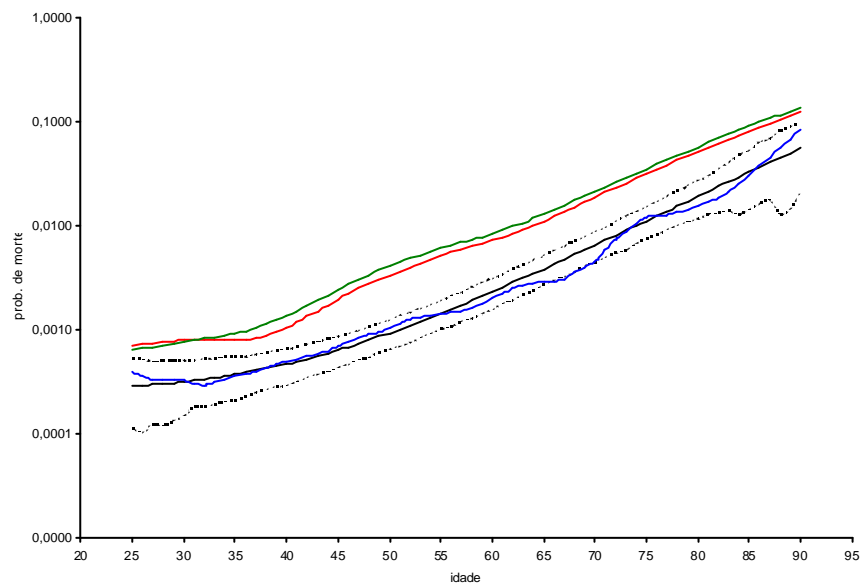
Concluimos que independente do sexo e do método de comparação utilizado, o modelo dinâmico global é o melhor modelo para elaboração de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas. As probabilidades de morte estimadas, bem como seus intervalos de probabilidade de 95%, obtidos através desse modelo, para o sexo masculino e feminino, estão disponíveis no Anexo II. Além disto, observamos que as probabilidades de mortes estimadas por este modelo são mais suaves que as obtidas com o modelo local (Figura 2).



**Figura 2:** Probabilidades de mortes estimadas, em escala logarítmica, a partir dos modelos propostos, para o sexo masculino, onde modelo dinâmico global (linha cheia) e local (linha tracejada).

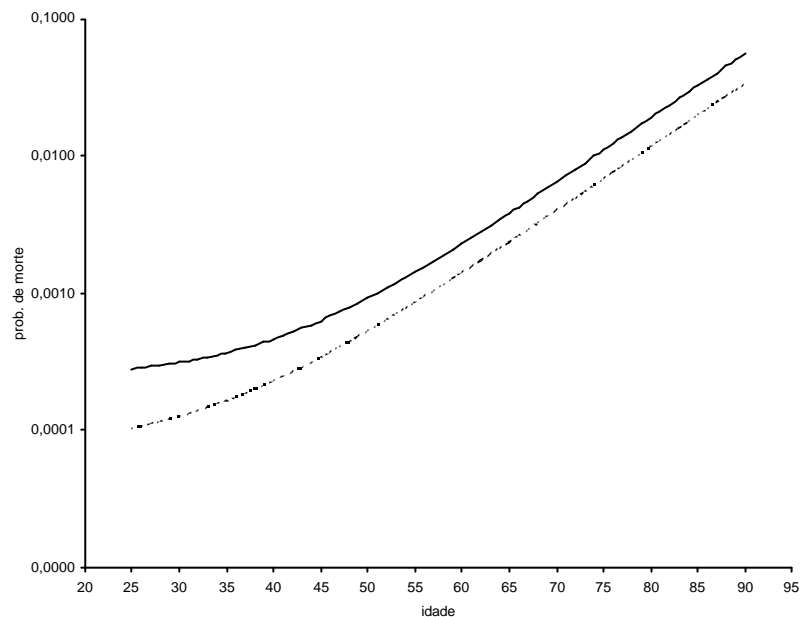


**Figura 3:** Comparação entre a tábua de mortalidade bayesiana para o sexo masculino (em escala logarítmica): probabilidades de mortes estimadas (preto – linha cheia), intervalo de probabilidade de 95% (preto - linha tracejada), AT-83 Male (verde), AT-2000 Basic Male (vermelho) e VBT-2001 Male (azul).



A tábua de mortalidade obtida por meio deste modelo, para o sexo masculino, é comparada com conhecidas tábuas de mortalidade consagradas pelo mercado. Na Figura 3, são apresentadas as estimativas pontuais das probabilidades de morte e seu intervalo de probabilidade de 95%, além das probabilidades de morte referentes às tábuas biométricas: AT-83 Male - estabelecida como sendo o limite máximo de probabilidade de morte para a cobertura de sobrevivência no Brasil; AT-2000 Basic Male – a mais utilizada atualmente e VBT-2001 Male, com período de seleção de um ano

**Figura 4:** Comparação entre as tábuas de mortalidade bayesianas construídas para sexo masculino e feminino, em escala logarítmica, onde sexo masculino (linha cheia) e sexo feminino (linha tracejada).



– uma tábua mais recente, descrita em American Academy of Actuaries (2002) e ainda não utilizada no Brasil.

A partir da Figura 3, observamos que a tábua utilizada como limite máximo de probabilidade (AT-83 Male) possui probabilidades de morte superiores às obtidas para população que contrata a cobertura de sobrevivência no Brasil. O mesmo ocorre com a tábua AT-2000 Basic Male. Isto significa dizer que as seguradoras, em sua maioria, estão considerando, na cobertura de sobrevivência, que os consumidores irão sobreviver por um tempo inferior ao estimado, podendo levá-las à insolvência, pois constituem provisões matemáticas a menor que o necessário. As probabilidades de morte estimadas para o ano de 2002 da população que adquire a cobertura de sobrevivência no Brasil assemelham-se às probabilidades de morte projetadas para o ano de 2001 dos indivíduos que compram seguro de vida em seguradoras americanas (VBT-2001 Male). Comentários semelhantes são adequados, também, para o sexo feminino.

Como era de se esperar as probabilidades de morte do sexo feminino são inferiores às do sexo masculino (ver Figura 4), esta constatação é usualmente verificada em todas as famílias de tábuas

de mortalidade, pois como é de conhecimento público as mulheres possuem uma maior expectativa de vida.

#### **4. Aplicação: importância da tábua biométrica no cálculo da provisão matemática**

Nesta Seção será demonstrada a importância da adequação da tábua biométrica, utilizada na cobertura de sobrevivência, à real mortalidade da população exposta ao risco para que a seguradora mantenha-se solvente. Esta demonstração dar-se-á através do cálculo da provisão matemática, por meio de MCMC, fazendo uso de conceitos de valor em risco (value at risk – VaR). Essas provisões refletem o compromisso futuro da seguradora menos o do participante e se dividem em: provisão matemática de benefícios a conceder – PMBaC, constituída antes da concessão da renda, e provisão matemática de benefícios concedidos – PMBC, constituída durante o período de recebimento da renda pelo assistido. A PMBC reflete apenas o total dos compromissos futuros da seguradora, pois os assistidos não contribuem mais para o plano, e é calculada pela multiplicação do valor da renda pelo valor da anuidade. No Brasil, as rendas, em sua maioria, são pagas mensalmente e a PMBC é calculada e contabilizada mensalmente. Assim, o cálculo mensal desta provisão consiste em multiplicar o valor da renda mensal pelo valor da anuidade mensal.

Anuidade é definida como sendo o valor presente atuarial das rendas de valor unitário pagas periodicamente durante um determinado período de tempo ou vitaliciamente. Há vários tipos de anuidades, que podem ser classificadas da seguinte forma:

1. quanto à periodicidade dos pagamentos: mensais, bimestrais, trimestrais, semestrais ou anuais;
2. quanto à forma de pagamento: vitalícia, temporária e diferida;
- e
3. quanto ao início de pagamento da renda: antecipada ou postecipada, dependendo das rendas serem pagas no início ou fim de cada período.

Independente de sua classificação, as anuidades são calculadas a partir da tábua biométrica, da taxa de juros e da metodologia fixadas no plano de previdência protocolado no órgão federal regulamentador.

Vamos comparar as provisões matemáticas de benefícios concedidos, considerando que as rendas são pagas vitaliciamente aos assistidos no início do mês, obtidas: por meio do método determinístico utilizado pelo mercado segurador, considerando a tábua biométrica fixada no plano, e por meio do cálculo da distribuição preditiva da anuidade, obtida através de simulação estocástica. A tábua de mortalidade bayesiana selecionada na Seção anterior e o conceito de valor em risco (VaR) serão utilizados para determinar o montante necessário a constituir para garantir a solvência da empresa.

Inicialmente descreveremos de forma sucinta o cálculo determinístico da anuidade mensal vitalícia antecipada para a idade

${}_{x|12}\ddot{a}_x$ , que representa o valor presente atuarial das rendas de valor unitário pagas vitaliciamente no início de cada mês a um indivíduo de idade  $x$ .

Denote por  ${}_k E_x$  o valor de desconto atuarial, i.é: o valor presente de um capital de valor unitário devido no tempo  $k$  a um indivíduo de idade  $x$ :

$${}_k E_x = \frac{1}{(1+i)^k} \cdot {}_k P_x$$

onde:  ${}_0 E_x = 1$ ,  $i$  = taxa de juros ao ano e  ${}_k P_x$  = probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  sobreviver até a idade  $x + k$ .

Assim, a anuidade anual vitalícia antecipada para a idade  $x$  é dada por:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k E_x = \frac{N_x}{D_x}$$

onde:  $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$ ,  $D_x = l_x \cdot \frac{1}{(1+i)^x}$ , e  $l_x = l_{x-1} \cdot q_{x-1}$ , com  $l_x =$

número de sobreviventes a cada idade  $x$  e  $l_0 =$  raiz da tábua, fixada em 10.000. Por outro lado, a anuidade mensal vitalícia antecipada para a idade  $x$  será (Bowers *et al.*, 1986):

$${}_{x|12}\ddot{a}_x = 12 \cdot \left( \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_k E_x}{12} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{\frac{k}{12}}} \cdot \frac{{}_k P_x}{12} \cong 12 \cdot \left( \ddot{a}_x - \frac{11}{24} \right)$$

(4)

onde:  ${}_{x|12}\ddot{a}_x$  é o valor presente atuarial das rendas vitalícias de valor anual unitário pagas de forma fracionada no início de cada mês a um indivíduo de idade  $x$ .

Obteremos facilmente a distribuição preditiva das anuidades,

$p({}_{x|12}\ddot{a}_x | D_t)$ , uma vez que  ${}_{x|12}\ddot{a}_x$  são funções das probabilidade de mortes. O valor em risco – VaR, percentil de ordem  $1-\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a}$  = nível de risco) da distribuição preditiva acima, será denotado por

${}_{x|12}\ddot{a}_x^+$ , i.é:

$$p({}_{x|12}\ddot{a}_x > {}_{x|12}\ddot{a}_x^+ | D_t) = \mathbf{a}$$

A anuidade estimada para idade  $x$  é igual ao valor correspondente ao VaR de nível  $\alpha$  da distribuição preditiva da anuidade mensal vitalícia antecipada, sendo o nível de risco uma questão a ser decidida pelo gestor da empresa. Então, o valor da PMBC necessária para solvência da empresa é calculado pela multiplicação do VaR pela renda mensal vitalícia. A diferença entre este e a PMBC calculada por meio da tábua de mortalidade e da metodologia determinística aprovadas no plano deve ser aportada pela seguradora. Este valor correspondente à provisão adicional de solvência que é denominada provisão de insuficiência de contribuição – PIC, devendo obrigatoriamente ser constituída pelas seguradoras por força de regulamentação específica.

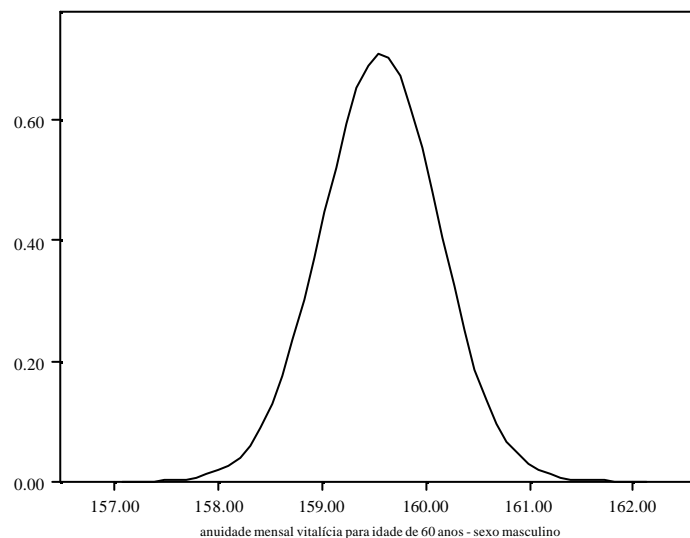
A seguir, exemplificamos a importância da adequação da tábua de mortalidade através do cálculo de provisão, fazendo uso de conceitos de valor em risco.

#### 4.1. Exemplo de cálculo das provisões para um único assistido

Seja um plano de previdência hipotético que garanta 6% de juros ao ano e tábua de mortalidade AT-83 Male, vamos calcular as provisões de um assistido do sexo masculino com 60 anos de idade que receba uma renda mensal vitalícia no início do mês de valor igual a R\$ 1.000,00.

Aplicando a equação (4), obtemos a anuidade mensal vitalícia antecipada de 141,34. A provisão matemática de benefícios concedidos será R\$ 141.340,00. Utilizando as saídas do MCMC implementado no WinBUGS, obtemos a distribuição preditiva ilustrada na Figura 5.

**Figura 5:** Distribuição de densidade preditiva da anuidade mensal vitalícia antecipada para idade de 60 anos, sexo masculino.

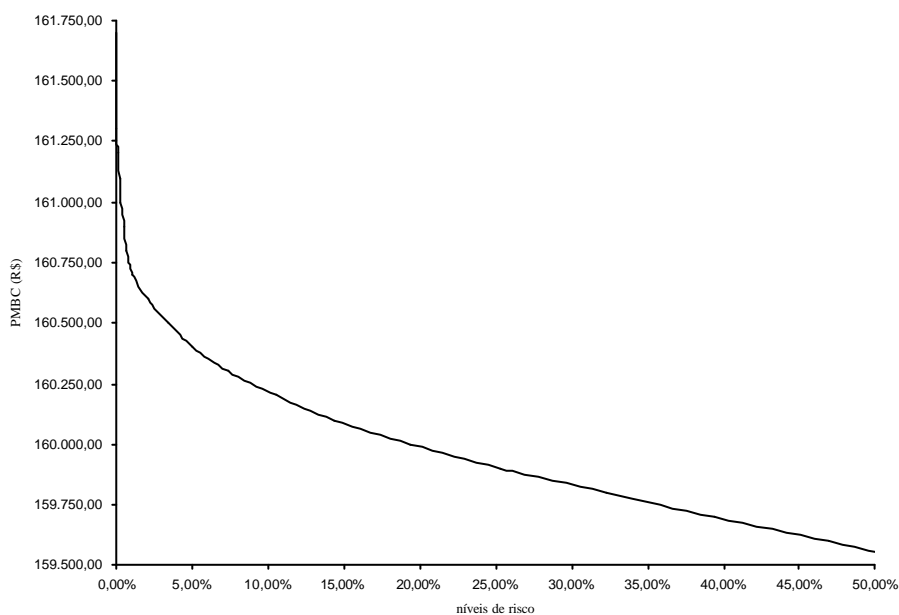


Fixando-se o nível de risco  $\alpha$  podemos obter o valor da PMBC necessária para que a seguradora esteja solvente e da provisão a ser constituída - PIC. Na Tabela 2, apresentamos essas quantidades para diferentes valores de  $\alpha$ . Podemos também verificar a evolução da PMBC calculada pelo método bayesiano em função do aumento do nível de risco analisando a Figura 6.

**Tabela 2:** Cálculo das anuidades e provisões utilizando o conceito de VaR, para diferentes níveis de risco

nível de risco	anuidade estimada	PMBC necessária (R\$)	PIC (R\$)	PIC / PMBC determ.
50,0%	159,60	159.600,00	18.260,00	12,92%
25,0%	160,00	160.000,00	18.660,00	13,20%
10,0%	160,30	160.300,00	18.960,00	13,41%
5,0%	160,50	160.500,00	19.160,00	13,56%
2,5%	160,60	160.600,00	19.260,00	13,63%
1,0%	160,80	160.800,00	19.460,00	13,77%

**Figura 6:** PMBC necessária para que a seguradora mantenha-se solvente, em reais, em função do nível de risco



Analisando a Tabela 2 e a Figura 6, verificamos que quanto menor o nível de risco que a seguradora deseje correr, maior a PMBC necessária para que a seguradora mantenha-se solvente e maior a PIC a aportar. Portanto, a tarefa de escolha do nível de risco é muito importante para uma gestão segura da empresa.

---

## 5. Conclusão

Neste artigo implementamos modelos de graduação bayesiana de taxas de mortalidade utilizando MCMC, através do WinBUGS. As probabilidades de mortes futuras foram estimadas por meio da distribuição preditiva do número de mortes para cada idade, o qual é modelado como sendo Poisson distribuído, considerando que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com a mesma probabilidade.

Para elaboração de tábuas de mortalidade bayesianas, propomos dois modelos dinâmicos: local e global, onde, para estimar as probabilidades de morte para o ano de 2002, é levada em consideração a evolução temporal ocorrida na mortalidade da massa estudada entre os anos de 1998 e 2001. Após a comparação entre os modelos, verificamos que o modelo dinâmico global é o melhor modelo para elaboração de tábuas de mortalidade bayesianas para ambos os sexos.

Após a obtenção das tábuas de mortalidade bayesianas, ficou demonstrado que as tábuas de mortalidade utilizadas atualmente nas coberturas de sobrevivência de planos de previdência no Brasil estão defasadas. Isto é, possuem probabilidades de morte superiores à realidade da população estudada, podendo acarretar problemas de insolvência nas seguradoras, ressalvada a possibilidade dos dados fornecidos por elas não corresponderem à realidade.

Como esperado, as tábuas de mortalidade bayesianas para o sexo masculino apresentam maiores probabilidades de morte do que as do sexo feminino, pois, como é sabido, as mulheres possuem uma maior expectativa de vida.

Com o objetivo de exemplificar a importância de adequação da tábua de mortalidade, utilizada na cobertura de sobrevivência, à real mortalidade da população exposta ao risco para que não haja problema de insolvência nas seguradoras, comparamos os cálculos da provisão matemática de benefícios concedidos obtidos pelos seguintes métodos:

1. Determinístico (adotado pelo mercado segurador), onde utilizamos uma conhecida tábua biométrica de mortalidade; e
2. Bayesiano, onde utilizamos MCMC e conceitos de VaR e fazemos uso da tábua de mortalidade bayesiana construída neste artigo.

A partir dessa comparação, apresentamos a metodologia de cálculo para obtenção da provisão adicional (PIC) que as seguradoras devem constituir para se manterem solventes.

Com isso, esperamos contribuir, ao propormos modelos de graduação bayesiana, implementados através de pacote estatístico de fácil utilização e que pode ser obtido sem custo, para que as seguradoras possam avaliar as taxas de mortalidade de sua massa exposta ao risco e, a partir desta avaliação, utilizar tábuas biométricas de mortalidade ajustadas à realidade, constituindo assim



adequadamente suas provisões, de forma tecnicamente apropriada, para que não haja risco de insolvência.

Uma extensão natural deste trabalho, tendo em vista a tendência de redução da mortalidade, é modelar o fator de redução de mortalidade, como realizado em Renshaw e Haberman (2000), mas com enfoque bayesiano e preditivo, diferente do modelo descrito por esses autores. No entanto, como possuímos apenas quatro anos de dados referentes ao mercado brasileiro, no momento esta modelagem não é possível.



---

## 6. Referências bibliográficas

American Academy Actuaries. *Final Report of the American Academy of Actuaries Commissioners Standard Ordinary Task Force*. Philadelphia, USA, 2002.

BOWERS, N. L.; GERBER, H. U.; HICKMAN J. C.; *et al.* *Actuarial mathematics*, 1 ed. Itasca, Illinois, USA: The Society of Actuaries, 1986.

BROFFIT, J. D. *Increasing and increasing convex bayesian graduation*. Transactions of Society of Actuaries, v. 40, 1988, p. 115-148.

BROOKS, S. P. e GELMAN, A. *Alternative methods for monitoring convergence of iterative simulations*. Journal of Computational and Graphical Statistics, v. 7, 1998, p. 434-455.

CARLIN, B. P. *A simple monte carlo approach to bayesian graduation*. Transactions of Society of Actuaries, v. 44, 1992, p. 55-76.

GAMERMAN, D. *Simulação estocástica via cadeias de Markov*. 12ª SINAPE, ABE (Associação Brasileira de Estatística), 1996.

GELFAND, A. E. e GHOSH S. F. *Model choice: a minimum posterior predictive loss approach*. Biometrika, v. 85, 1998, p. 1-11.

GERBER, H. U. *Life insurance mathematics*, 3 ed. Zürich, Swiss: Springer, 1997.

GORDON, R. J. *Applying the Gibbs sampler and the metropolis algorithm to bayesian graduation of mortality rates*. M.Sc. dissertation, New York University, New York, USA, 1998.

HABERMAN, S. e RENSHAW, A. E. *Generalized linear models and actuarial science*. The Statistician, v. 45, n. 4, 1996, p. 407-436.

HICKMAN, J. C. e MILLER, R. B. *Notes on bayesian graduation*. Transactions of Society of Actuaries, v. 29, 1977, p 1-21.

KIMELDORF, G. S. e JONES, D. A. *Bayesian graduation*. Transactions of Society of Actuaries, v. 19, 1967, p 66-112.

MCDONALD, J. W. e PREVOST, A. T., 1997. *The fitting of parameter-constrained demographic models*. Mathematical and Computer Modelling, v. 26, n. 6, 1997, p. 79-88.

MENDOZA, M.; MADRIGAL, A. M. e GUTIÉRREZ-PEÑA, E. *Predictive mortality graduation and the value at risk: a bayesian approach*. Working Paper DE-C01.5, ITAM, México, 2001.

MIGON, H. S. e MOURA, F. S. *Hierarchical bayesian collective risk model: an application in health insurance*. Rio de Janeiro: Departamento de Métodos Estatísticos – IM – UFRJ, 2002.

NEWTON, M. A. e RAFTERY, A. E. *Approximate bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap (with discussion)*. Journal of the Royal Statistical Society, series B, v. 56, 1994, p. 3-48.

RENSHAW, A. E. e HABERMAN, S. *Modelling for mortality reduction factors*. Actuarial Research Paper, v. 127. London: City University, 2000.

SPIEGELHALTER, D., THOMAS, A.; BEST, N. *et al.* *BUGS 0.5 – Bayesian inference using Gibbs sampling manual (version ii)*, 1996. Obtido via Internet: [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs).

SPIEGELHALTER, D.; BEST, N.; CARLIN, B. P. e LINDE, A., 2002. *Bayesian measures of model complexity and fit*. Journal of the Royal Statistical Society, series B, v. 64, 2002, pp. 583-639.

SPIEGELHALTER, D.; THOMAS, A.; BEST, N. *et al.* *WinBUGS user manual, version 1.4*, 2003. Obtido via Internet: [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs).

WEST, M., HARRISON, P.J. e MIGON, H.S. *Dynamic generalized linear model and bayesian forecasting*. Journal of the American Statistical Association, v. 80, 1985, p. 73-97.



**Anexo I – Dados:** quantidade central de expostos ao risco observados e número de mortes observadas no período entre 1998 e 2001.

idade	homens		mulheres		idade	homens		mulheres		idade	homens		mulheres	
	expos. ao risco	mortes	expos. ao risco	mortes		expos. ao risco	mortes	expos. ao risco	mortes		expos. ao risco	mortes	expos. ao risco	mortes
0	1.457	0	1.149	0	39	191.767	131	93.594	33	78	6.513	172	3.814	56
1	2.002	0	1.594	0	40	189.534	138	91.644	48	79	5.239	165	3.182	50
2	2.290	0	1.877	0	41	189.988	131	92.189	31	80	4.132	101	2.586	45
3	2.207	0	1.843	0	42	187.871	151	90.231	40	81	3.165	75	2.142	53
4	2.149	0	1.852	0	43	181.762	142	87.304	47	82	2.233	59	1.489	24
5	2.112	0	1.788	0	44	179.907	158	85.047	42	83	1.602	91	1.073	33
6	2.023	0	1.789	0	45	169.827	147	80.524	30	84	1.231	41	797	20
7	1.950	0	1.736	0	46	165.711	143	77.097	42	85	972	45	603	17
8	1.853	0	1.668	2	47	158.260	137	72.922	59	86	728	19	465	18
9	1.883	0	1.628	0	48	148.063	165	67.730	76	87	644	32	388	11
10	1.902	0	1.733	0	49	138.978	151	62.511	59	88	517	19	288	5
11	1.945	0	1.716	0	50	127.568	183	57.626	52	89	433	19	206	6
12	1.814	0	1.682	0	51	118.329	149	54.355	55	90	330	15	153	5
13	1.781	0	1.653	0	52	107.069	161	49.756	49	91	205	12	118	6
14	2.362	1	2.074	0	53	98.261	162	45.502	40	92	139	11	90	5
15	4.397	0	3.735	3	54	86.882	140	41.577	48	93	86	8	72	2
16	7.537	3	6.117	6	55	78.143	140	37.983	56	94	55	4	46	0
17	11.602	3	9.251	2	56	69.787	148	34.244	34	95	41	4	33	1
18	17.668	10	13.668	10	57	61.254	148	29.809	56	96	23	0	24	1
19	27.282	15	20.373	5	58	54.390	140	26.609	70	97	14	0	17	0
20	39.187	22	26.421	7	59	49.762	117	23.674	47	98	16	0	27	0
21	52.114	21	32.970	14	60	44.583	136	21.699	53	99	10	0	18	2
22	63.735	34	38.559	11	61	41.545	146	20.216	38	100	8	1	5	0
23	71.537	42	42.467	19	62	36.775	132	18.005	39	101	3	1	3	0
24	79.096	48	46.490	9	63	33.728	125	16.471	42	102	0	1	1	0
25	86.551	53	50.129	13	64	30.998	134	15.066	56	103	0	0	0	0
26	94.143	66	54.948	19	65	27.926	116	13.777	54	104	0	0	0	0
27	104.969	64	60.760	12	66	24.595	93	12.696	46	105	0	0	0	0
28	114.155	57	65.441	18	67	21.735	119	11.593	42	106	0	0	0	0
29	125.502	64	72.160	29	68	19.791	105	11.251	60	107	0	0	0	0
30	132.145	83	74.291	21	69	18.174	109	10.590	50	108	0	0	0	0
31	142.684	84	78.735	25	70	15.824	126	9.683	47	109	0	0	0	0
32	149.030	90	79.380	21	71	13.606	93	8.616	58	110	0	0	0	0
33	160.011	88	83.987	24	72	11.522	102	7.608	66	111	0	0	0	0
34	169.838	115	88.296	29	73	10.142	100	6.739	65	112	0	0	0	0
35	179.808	111	91.186	44	74	9.311	109	6.104	70	113	0	0	0	0
36	188.322	115	94.700	28	75	8.779	129	5.504	72	114	0	0	0	0
37	191.326	122	95.452	31	76	8.015	130	4.871	64	115	1	0	0	0
38	191.510	130	94.608	45	77	7.233	187	4.213	57	116	1	0	0	0

**Anexo II – Tábuas biométricas de mortalidade bayesianas:** construídas a partir do modelo dinâmico global.

**A) Sexo masculino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000281	0,000112	0,000521	58	0,001889	0,001271	0,002540
26	0,000286	0,000102	0,000511	59	0,002089	0,001406	0,002810
27	0,000292	0,000121	0,000485	60	0,002303	0,001557	0,003111
28	0,000298	0,000117	0,000497	61	0,002544	0,001766	0,003394
29	0,000305	0,000132	0,000500	62	0,002811	0,001914	0,003824
30	0,000314	0,000148	0,000492	63	0,003110	0,002136	0,004179
31	0,000321	0,000176	0,000504	64	0,003453	0,002366	0,004629
32	0,000331	0,000180	0,000517	65	0,003819	0,002673	0,005134
33	0,000342	0,000188	0,000522	66	0,004239	0,002961	0,005687
34	0,000353	0,000200	0,000541	67	0,004707	0,003238	0,006337
35	0,000366	0,000206	0,000543	68	0,005238	0,003558	0,007104
36	0,000383	0,000222	0,000547	69	0,005824	0,004082	0,007834
37	0,000400	0,000246	0,000575	70	0,006462	0,004441	0,008679
38	0,000419	0,000263	0,000593	71	0,007198	0,004901	0,009582
39	0,000440	0,000280	0,000626	72	0,008007	0,005429	0,010830
40	0,000464	0,000288	0,000643	73	0,008933	0,005790	0,012410
41	0,000489	0,000314	0,000677	74	0,009924	0,006667	0,013620
42	0,000518	0,000340	0,000713	75	0,011060	0,007425	0,015130
43	0,000553	0,000368	0,000753	76	0,012340	0,008138	0,016970
44	0,000590	0,000388	0,000810	77	0,013740	0,009153	0,019130
45	0,000630	0,000425	0,000850	78	0,015260	0,009945	0,021420
46	0,000677	0,000463	0,000906	79	0,017010	0,010800	0,024140
47	0,000726	0,000505	0,000972	80	0,019020	0,011620	0,027170
48	0,000784	0,000536	0,001050	81	0,021170	0,012860	0,030040
49	0,000848	0,000597	0,001128	82	0,023670	0,013160	0,035130
50	0,000919	0,000637	0,001224	83	0,026310	0,013770	0,040740
51	0,001000	0,000684	0,001343	84	0,029410	0,012800	0,047790
52	0,001089	0,000746	0,001463	85	0,032630	0,014220	0,052990
53	0,001187	0,000828	0,001595	86	0,036260	0,016190	0,063220
54	0,001301	0,000899	0,001730	87	0,040440	0,017620	0,068640
55	0,001424	0,001001	0,001891	88	0,045090	0,012900	0,080950
56	0,001563	0,001051	0,002101	89	0,049950	0,014490	0,090530
57	0,001716	0,001186	0,002279	90	0,055720	0,021660	0,097140

**B) Sexo feminino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000104	0,000000	0,000291	58	0,001154	0,000549	0,001865
26	0,000108	0,000000	0,000272	59	0,001284	0,000497	0,002112
27	0,000112	0,000000	0,000290	60	0,001415	0,000589	0,002354
28	0,000117	0,000000	0,000285	61	0,001567	0,000723	0,002599
29	0,000121	0,000000	0,000299	62	0,001738	0,000814	0,002926
30	0,000127	0,000000	0,000284	63	0,001926	0,000915	0,003108
31	0,000133	0,000000	0,000291	64	0,002137	0,001022	0,003472
32	0,000140	0,000000	0,000313	65	0,002369	0,001064	0,003824
33	0,000148	0,000037	0,000297	66	0,002634	0,001164	0,004183
34	0,000157	0,000036	0,000320	67	0,002920	0,001302	0,004679
35	0,000165	0,000035	0,000346	68	0,003251	0,001453	0,005222
36	0,000175	0,000032	0,000347	69	0,003612	0,001795	0,005972
37	0,000186	0,000062	0,000343	70	0,004019	0,001983	0,006596
38	0,000200	0,000063	0,000378	71	0,004461	0,002195	0,007299
39	0,000214	0,000064	0,000386	72	0,004937	0,002147	0,008135
40	0,000231	0,000068	0,000439	73	0,005525	0,002610	0,009365
41	0,000248	0,000098	0,000455	74	0,006129	0,002899	0,010400
42	0,000266	0,000102	0,000477	75	0,006845	0,003042	0,011510
43	0,000289	0,000107	0,000497	76	0,007608	0,003337	0,012620
44	0,000314	0,000109	0,000545	77	0,008441	0,003948	0,014140
45	0,000340	0,000152	0,000571	78	0,009435	0,003868	0,015380
46	0,000370	0,000160	0,000640	79	0,010480	0,004857	0,017370
47	0,000407	0,000164	0,000695	80	0,011650	0,005063	0,020100
48	0,000445	0,000182	0,000772	81	0,012910	0,004619	0,022880
49	0,000486	0,000190	0,000807	82	0,014410	0,005786	0,024830
50	0,000532	0,000216	0,000919	83	0,015970	0,005181	0,030690
51	0,000586	0,000281	0,000956	84	0,017860	0,003552	0,034960
52	0,000642	0,000248	0,001053	85	0,020020	0,005013	0,044220
53	0,000710	0,000333	0,001199	86	0,022190	0,000000	0,046230
54	0,000775	0,000355	0,001278	87	0,024770	0,000000	0,055160
55	0,000853	0,000399	0,001435	88	0,027380	0,000000	0,059560
56	0,000944	0,000438	0,001577	89	0,030220	0,000000	0,075640
57	0,001045	0,000484	0,001741	90	0,033620	0,000000	0,083980