



Adequação do *BackTesting* no Modelo *Value-at-Risk*: Comparação entre Aproximação Normal e o Teste de Razão de Verossimilhança[†]

Reinaldo Antonio Gomes Marques

Bacharel em Atuária pela Universidade Federal de Minas Gerais. Mestrando em Atuária pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
rmarques@iapuc.puc-rio.br

Resumo

O trabalho tem por objetivo apresentar uma comparação entre dois testes (o Teste da Razão da Verossimilhança e o Teste pela Aproximação Normal) que possam auxiliar no aperfeiçoamento nas técnicas de validação do VaR. A partir do processo de simulação de Monte Carlo, procura-se estimar o número de perdas que excedem o VaR, em seguida, confrontá-las por meio dos dois testes e, posteriormente, verificar a eficiência de ambos. As simulações estão estruturadas na distribuição de probabilidade multivariada de forma que os retornos futuros de diversos ativos convirjam para a sua média histórica de um período pré-estabelecido. Este trabalho desenvolve, também, uma abordagem sobre alguns aspectos que possam comprometer o modelo *Value-at-Risk* e considerações sobre a alocação de capital ajustado ao risco em investir em renda variável aplicada, por exemplo, em entidades de previdência ou seguradoras.

Palavras-Chave

modelo *Value-at-Risk*; alocação de capital; renda variável; previdência; seguradoras.

Sumário

1. Introdução. 1.1. Problema de pesquisa e objetivos do estudo. 2. Referencial teórico. 2.1. Estimativa da variável Perda. 2.2. Mensuração do risco de mercado. 2.3. Considerações sobre o *Value-at-Risk*. 3. Teste de Adequação do Modelo: *Backtesting*. 3.1. Comparação entre aproximação Normal e LRT. 3.2. Resultados. 4. Conclusões. 5. Referências bibliográficas.

[†] Artigo recebido em 9/4/2008. Aprovado em 5/5/2008.



Abstract

BackTesting adjustment into the Value-at-Risk Model: comparison between normal approximation and the likelihood ratio test

Reinaldo Antonio Gomes Marques

Bachelor's degree in Actuary at the Universidade Federal de Minas Gerais (Federal University of Minas Gerais), currently taking a Master's degree in Actuary at Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Catholic University of Rio de Janeiro)

rmarques@iapuc.puc-rio.br

Summary

The purpose of this work is to present a comparison between two tests (the likelihood ratio test and the Normal approximation test), in order to improve the validation techniques of the VaR. Taking the Monte Carlo simulation process as the starting point, the aim is to estimate the quantity of losses that exceed the VaR and compare them with the aid of two tests, to subsequently verify, the efficiency of both. The simulations are structured in the Multivariate Probability Distribution, so that future returns of various assets converge to its historical average of a pre-established period. This work also develops an approach on some aspects that may hinder the Value-at-Risk model, and considerations on the allocation of adjusted capital of risk on investing in variable income applied, for example, in pension funds or insurance companies.

Key Words

Value-at-Risk Model; allocation of capital; variable income; pension fund; insurance companies.

Contents

1. Introduction. 1.1. Research problems and purposes of the study. 2. Theoretical references. 2.1. Estimation of the variable Loss. 2.2. Market Risk measurement. 2.3. Considerations about the Value-at-Risk. 3. Adjustment Test of the Model: Backtesting. 3.1. Comparison between Normal approximation and LRT. 3.2. Results. 4. Conclusions. 5. Bibliographical references.



Reinaldo Antonio Gomes Marques

Sinopsis

Adecuación del “BackTest” en el Modelo “Value-at-Risk”: comparación entre aproximación normal y el test de la razón de verosimilitud

Reinaldo Antonio Gomes Marques

Licenciado en Ciencias Actuariales por la Universidad Federal de Minas Gerais. Cursando el Master en Ciencias Actuariales por la Pontificia Universidade Católica de Río de Janeiro
rmarques@iapuc.puc-rio.br

Resumen

El trabajo tiene como objetivo presentar una comparación entre dos pruebas (el test de la razón de verosimilitud y el test por la aproximación Normal), los que pueden auxiliar en el perfeccionamiento de las técnicas de validación del VaR. A partir del proceso de simulación de Monte Carlo se busca estimar el número de pérdidas que exceden el VaR y, enseguida, confrontarlas por medio de dos pruebas y, posteriormente, verificar la eficiencia de ambos. Las simulaciones están estructuradas en la distribución de probabilidad multivariada de manera que los retornos futuros de diversos activos convergen para su promedio histórico de un periodo preestablecido. Este trabajo desarrolla, también, un enfoque acerca de algunos aspectos que pueden comprometer el modelo “Value-at-Risk” y consideraciones sobre el destino del capital ajustado al riesgo en invertir en renta variable aplicada, por ejemplo, en administradoras de fondos de pensión o aseguradoras.

Palabras-Clave

modelo “Value-at-Risk”; destino del capital; renta variable; fondo de pensión; aseguradoras.

Sumario

1. Introducción. 1.1. Problema de investigación y objetivos del estudio. 2. Referencial teórico. 2.1. Estimativa de la variable Pérdida. 2.2. Mensuración del riesgo de mercado. 2.3. Consideraciones sobre el “Value-at-Risk”. 3. Prueba de Adecuación del Modelo: “Backtesting”. 3.1. Comparación entre aproximación Normal y LRT. 3.2. Resultados. 4. Conclusiones. 5. Referencias bibliográficas.



1. Introdução

É inerente à maior parte dos investimentos a associação de um determinado nível de risco que na prática poderá acarretar uma determinada perda financeira em tempo futuro. Em função disso, vêm aumentando nos últimos anos o empenho das instituições financeiras, seguradoras e entidades de previdência em utilizar técnicas que auxiliam no gerenciamento dos riscos envolvidos e, como consequência, na minimização das perdas derivadas das decisões de investimento. Assim, a avaliação adequada dos aspectos relacionados ao risco de mercado tem assumido importância crescente no sistema financeiro, por diversos fatores relacionados às crises financeiras de amplitude global, aos compromissos em honrar as diversas obrigações, colapsos empresariais decorrentes de deficiências na gestão de riscos e às exigências de capital pelos órgãos fiscalizadores em função dos riscos incorridos pelas instituições.

Nesse contexto, percebe-se que administrar riscos é necessidade diária que se torna premente para instituições financeiras ligadas à intermediação de recursos que utilizam, em sua maior parte, recursos de terceiros, captados seja na forma de depósitos à vista ou em cotas de fundos de investimento.

Assim, desde outubro de 1994, quando o Banco J. P. Morgan apresentou a sua metodologia de gerenciamento de risco, o *Value-at-Risk* (VaR) passou ser incorporado como principal ferramenta pela maioria das entidades financeiras e, além disso, continua motivando inúmeras pesquisas no meio acadêmico na tentativa de obter uma melhor precisão para o modelo.

1.1. Problema de pesquisa e objetivos do estudo

Uma das principais características da legislação brasileira para as atividades que demandam uma rigidez da supervisão atuarial é sua excessiva preocupação com os riscos inerentes aos investimentos dos recursos dos participantes. Além disso, a legislação brasileira não apenas elabora e define regras e limites para a aplicação e diversificação dos investimentos como, por exemplo, a Resolução do Conselho Monetário Nacional 3.121/2003 (diretrizes para as Entidades de Previdência Complementar) ou a Resolução Normativa 67 da Agência Nacional de Saúde Suplementar (diretrizes para Entidades de Assistência de Saúde Privada), mas, também, a legislação vem mostrando uma grande preocupação para que as entidades demonstrem maior transparência em relação às suas atividades, para com seus participantes.

A exemplo disso, destaca-se a Resolução 13/2004, do Conselho de Gestão de Previdência Complementar, que estabeleceu princípios, regras e práticas de governança, gestão e controles internos a serem observados pelas entidades fechadas de previdência complementar. É muito provável que essa tendência em demonstrar de forma efetiva e transparente o gerenciamento de riscos relacionados aos fundos de previdência no Brasil seja reflexo da lei norte-americana *Sarbanes-Oxley* (2002), que teve como objetivo instruir as empresas de capital aberto a construir mecanismos e avaliações minuciosas de seus controles internos.

Ao avaliar a composição dos fundos de previdência complementar brasileiros, observa-se que esses fundos têm as maiores concentrações da América Latina em aplicações em títulos do governo.



De uma carteira de investimentos de R\$ 271 bilhões (previdência complementar), cerca de 90% das aplicações em renda fixa estão em títulos públicos. Na Argentina e no Chile, os investimentos nesses ativos estão limitados a 50%. No Uruguai, o limite é de 60% e no Peru, 40%. No Brasil, cerca de 60% da carteira de investimentos (R\$ 219 bilhões) dos fundos de pensão de empresas (fundos fechados e multipatrocinados), que estão na renda fixa, a maior parte (80%) é de títulos públicos. Nas carteiras dos fundos de previdência comercializados por seguradoras, ou fundos abertos (PGBLs, VGBLs e Planos Tradicionais), a situação não é diferente. Em 2005, dos R\$ 51,8 bilhões das entidades abertas de previdência complementar, conforme dados da Superintendência de Seguros Privados, grande parte é aplicada na renda fixa com títulos públicos. Os três gigantes do setor privado, que detêm mais de 50% da carteira total dos fundos abertos, a Itaú Vida e Previdência, o Bradesco Vida e Previdência e a Brasilprev, do Banco do Brasil, têm mais de 90% em renda fixa.

Existem evidências, tanto no cenário internacional como no ambiente doméstico, que apontam para uma perspectiva de redução na taxa básica de juros no Brasil. Observa-se recentemente no cenário nacional um relativo controle da inflação, o que implicaria para o Banco Central uma necessidade em reduzir a meta para a taxa básica de juros.

Nesse contexto, as entidades de previdência, seguradoras e instituições financeiras serão forçadas a diversificar sua gestão de portfólios na tentativa de cumprir as metas atuariais estabelecidas, o que certamente aumentará o risco das carteiras de investimentos. Assim, para evitar que essas entidades venham a ter um futuro semelhante ao da previdência social, órgãos reguladores do setor e operadores vêm adotando cada vez mais controles de risco e discutindo os melhores métodos de supervisão e fiscalização. Além disso, para uma gestão atuarial eficiente faz-se necessária a adoção de premissas a partir de evidências concisas, de forma a antecipar fatos que possam comprometer ou influenciar os cálculos atuariais. Sob a hipótese de redução da taxa de juros em futuro próximo, a aplicação de um modelo de gerenciamento de risco adequado torna-se um aspecto cada vez mais relevante.

A partir dessa necessidade, de cada vez mais as entidades se empenharam em obter um gerenciamento de risco de mercado eficiente, este trabalho propõe abordar o teste de adequação do modelo *Value-at-Risk*. Baseado na Simulação de Monte Carlo e a partir de uma carteira de ações do mercado brasileiro, o estudo busca fornecer uma avaliação da adequação da metodologia do VaR em que, por meio de dados dos retornos históricos dessa carteira, possa avaliar em horizonte futuro de tempo desejado a adequação do modelo *Value-at-Risk*.

A Simulação de Monte Carlo consiste em simular repetidamente os processos aleatórios baseados em uma distribuição de probabilidade, que, neste caso, terá a finalidade de gerar os retornos futuros para uma determinada carteira. Cada simulação gera um valor possível para a carteira no horizonte de tempo desejado. Assim, com um número de simulações suficiente, podemos obter as perdas ou ganhos no período e, por último, verificar a precisão do modelo *Value-at-Risk* para os cenários que foram gerados. A utilização do método de Monte Carlo consiste na utilização intensa de recursos computacionais por se tratar de estimação



de valores futuros. Neste trabalho, as simulações foram executadas em linguagem *Dev C++* com objetivo de avaliar o procedimento do *backtesting* ao VaR, comparando a utilização do teste de razão de verossimilhança com a aproximação da distribuição normal.

2. Referencial teórico

2.1. Estimativa da variável Perda

Na tentativa de apresentar uma melhor compreensão no uso do modelo de mensuração de risco de mercado, este trabalho apresentará uma concisa abordagem para a variável perda. Assim, seja V_0 e V_T o valor de mercado para um único ativo ou uma carteira no tempo $t = 0$ e $t = T$, sendo que usualmente utiliza-se o tempo em dias ou meses, as perdas ou ganhos dado um intervalo de tempo de T -dias podem ser espessadas pela seguinte variável (profit/loss):

$$L_T = -(V_T - V_0) \quad (1)$$

Note-se que as perdas são mensuradas com sinal positivo, caso contrário haverá um ganho se L_T for negativo. A perda L_T , no intervalo de tempo T , também poderá ser expressa por meio dos retornos:

$$R_{(T)} = \sum_{t \leq T} (-R_t) \quad (2)$$

Como as perdas são representadas com L_T positivos, o retorno no tempo T será a soma dos retornos com o sinal contrário entre o tempo t_0 até o tempo $t = T$. O valor total de mercado V_t para um ativo no tempo t pode ser expresso por $V_t = hS_t$, onde h é a quantidade de ações e S_t o preço do ativo no tempo t . Deseja-se, portanto, expressar a perda no tempo t em função do retorno R_t . Para isso, considera-se que a distribuição de probabilidade de ocorrer uma alta e uma baixa são iguais. Dessa forma, o preço de um ativo assume uma distribuição log-normal e o retorno de ativo segue uma distribuição normal (mesma probabilidade de alta e baixa). Se o preço de um ativo qualquer assume uma distribuição log-normal com média (μ_s) e variância (σ_s^2), a distribuição de probabilidade será dada por:

$$f(s; \mu, \sigma) = \frac{1}{s \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -[\ln(s) - \mu]^2 / 2\sigma^2 \right\} \quad s \geq 0 \quad (3)$$

onde:

$$E(S) = \exp(\mu + \sigma^2/2) \text{ e } Var(S) = \exp(2\mu + \sigma^2)\exp(\sigma^2 - 1)$$

Assim, os retornos de um ativo ou de uma carteira no tempo t , considerando que não há pagamento de dividendos e que esses tendem a assumir uma distribuição gaussiana, podem ser expressos, em função do preço do ativo, por:

$$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) \quad (4)$$



Existem evidências de que algumas distribuições de retornos individuais não são normalmente distribuídas já que, em alguns casos, apresentam caudas pesadas (*fat tails*). Este é um aspecto muito relevante para um gerenciamento eficiente de riscos, pois as distribuições com caudas pesadas podem diagnosticar uma maior frequência de valores extremos que a distribuição normal.

Entretanto, apesar de os retornos de um ativo não apresentarem necessariamente uma distribuição normal, conforme Crouhy *et al.* (2001), os retornos de uma carteira bem diversificada por meio de muitos fatores de riscos poderão tender a uma distribuição normal. Isto pode ser explicado pelo *Teorema do Limite Central*, em que variáveis aleatórias independentes de distribuições bem comportadas convergem, em grandes amostras, para uma distribuição normal. Portanto, segundo o *Teorema do Limite Central*, se R_1, \dots, R_n foram variáveis aleatórias independentes com média μ e variância σ^2 ($0 < \sigma^2 < \infty$), então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[\frac{n^{-1/2} (\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq x \right] \cong \Phi(x) \quad (5)$$

Além disso, uma suposição fundamental, de acordo com RiskMetrics (1996), é que os retornos subjacentes em preços financeiros são distribuídos de acordo com a distribuição normal condicional. A implicação principal desta suposição é que enquanto a distribuição de retorno em cada ponto do tempo é normalmente distribuída, a distribuição do retorno durante o período inteiro da amostra não é necessariamente normal.

Caso seja de interesse avaliar se a carteira ou o ativo em estudo tenha distribuição normal, uma opção é realizar o teste de normalidade Jarque-Bera (1987). O teste consiste em avaliar a simetria, comportamento da distribuição em torno da média, e a curtose em “excesso”, que tem por finalidade verificar se existe mais peso nas caudas do que a distribuição gaussiana (curtoses positivas representam caudas pesadas). Para realização do teste, sob a hipótese nula em que os retornos seguem uma distribuição normal, a estatística de Jarque-Bera (1987) é dada por:

$$JB = n \left[\frac{\hat{\tau}^2}{6} + \frac{(\hat{\kappa} - 3)^2}{24} \right] \quad (6)$$

A estatística é definida em termos das estimativas amostrais de assimetria ($\hat{\tau} = E[(X - \mu)^3] / \sigma^3$), do excesso de curtose ($\hat{\kappa} = E[(X - \mu)^4] / \sigma^4$) e do tamanho da amostra. O valor crítico da função é determinado por uma distribuição *qui-quadrado* com 2 graus de liberdade.

Alternativamente ao Jarque-Bera (1987), um teste não paramétrico que pode ser realizado é o *Anderson-Darling*, descrito por Conover (1980). Esse, por sua vez, para estabelecer o critério de rejeição, se os dados seguem uma determinada distribuição de probabilidade, formula o seguinte teste de hipótese:

H_0 : dados seguem uma determinada distribuição de probabilidade

H_1 : dados não seguem uma determinada distribuição de probabilidade



Onde a estatística para o teste *Anderson-Darling* é dada por (CONOVER, 1980):

$$AD = -n - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)}{n} \ln[F(x_i) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))] \quad (7)$$

A distribuição acumulada de interesse está representada em $F(x_i)$. Para o cálculo da estatística *Anderson-Darling*, é necessário que os dados estejam ordenados, isto é, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Como a distribuição de probabilidade interesse para os retornos é a normal, o valor-p deve ser computado a partir da estatística $z^* = A(1 + 0,75/n + 2,25/n^2)$. Assim, com 95% de confiança, o valor-p, para que os retornos assumem uma distribuição normal, deve ser maior que 5%.

Relembramos que, após compreender os testes de normalidade, o objetivo é expressar a equação (1), em função dos retornos. Sendo assim, seja $S_0, S_1, S_2, \dots, S_t$ e $R_0, R_1, R_2, \dots, R_t$, os preços do ativo e os retornos no tempo $0, 1, 2, \dots, t$, respectivamente, logo:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \exp(R_1); \\ S_2 &= S_1 \exp(R_2) = S_0 \exp(R_1) \exp(R_2) = S_0 \exp(R_1 + R_2); \\ &\vdots \\ S_t &= S_1 \exp(R_t) = S_0 \exp(R_1) \exp(R_2) \dots \exp(R_t) = S_0 \exp(R_1 + R_2 + \dots + R_t); \end{aligned}$$

Logo:

$$S_T = S_0 \exp\left(\sum_{t \leq T} (R_t)\right) \text{ ou } S_T = S_0 \exp(-R_T) \quad (8)$$

Seja também:

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_0 = hS_0 \text{ ou} & S_0 = V_0/h \\ V_t = hS_t \text{ ou} & S_t = V_t/h \end{array} \right.$$

Substituindo S_T e S_0 em função de V e h na equação (4), temos:

$$\frac{V_t}{h} = \frac{V_0}{h} \exp(-R_T) \quad (h \neq 0)$$

$$V_T = V_0 \exp(-R_T) \quad (9)$$

Dessa forma, a perda no tempo T em função dos retornos, a variável aleatória perda pode ser definida pela seguinte expressão:

$$L_T = -(V_T - V_0) = -(V_0 \exp(-R_T) - V_0)$$

Logo,

$$L_T = V_0 (1 - \exp(-R_T)) \quad (10)$$



Considerando uma carteira com diversos ativos, e se $V_{tj} = h_j S_{tj}$ é o valor de mercado do j -ésimo ativo no tempo t , observa-se que o valor de mercado da carteira pode ser escrito por $V_t = \sum_j V_{t,j}$. Ao introduzir o vetor de pesos $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$, onde $w_j = V_{0j}/V_0$, a perda da carteira no tempo T pode ser redefinida em função dos retornos como:

$$L_T = V_0 \sum_j w_j (1 - \exp(-R_{(T,j)})) \quad (11)$$

onde: $R_{(T)} = (R_{(T,1)}, R_{(T,2)}, \dots, R_{(T,d)})$ é o vetor aleatório para os diferentes ativos.

2.2. Mensuração do risco de mercado

Define-se o valor em risco (VaR), segundo Crouhy *et al.* (2001), como a perda máxima ao longo de um período de tempo tal que haja uma baixa probabilidade de que a perda efetiva ao longo do período dado seja maior. Em outras palavras, o VaR representa a perda máxima esperada, medida em valores monetários, dada uma probabilidade de ocorrência e um intervalo de tempo. Logo, o valor em risco, $VaR(T,q)$, é o percentil- q da distribuição de perda. Assim, o valor em risco com probabilidade q terá que satisfazer a seguinte equação:

$$P\{L_T \leq VaR(T,q)\} = q \quad (12)$$

Se F_T é a função de densidade dos retornos ($R_{(T)}$), então $F_T(x) = P\{R_{(T)} \leq x\}$. Aplicando a equação (10), podemos escrever, de forma alternativa, o valor em risco como:

$$VaR(T,q) = V_0 (1 - \exp(-F_T^{-1}(q))) \quad (13)$$

Assim, conforme mencionado anteriormente, na hipótese de que os retornos sigam uma distribuição normal, é muito comum que em horizontes de tempo muito curto, tipicamente um dia, o valor em risco possa ser definido como:

$$VaR(T,q) = V_0 \sigma_T \Phi^{-1}(q) \quad (14)$$

Considerando que os ativos derivam de um mercado eficiente onde os retornos diários R_t são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d), então o retorno em t dias também é normalmente distribuído com variância $\sigma_t^2 = t \sigma^2$. Logo, podemos expressar o VaR em horizonte de tempo diferente de um dia pela seguinte expressão:

$$VaR(T,q) = \sqrt{t} VaR(1,q) \quad (15)$$



Outro aspecto importante a considerar é que na prática a maioria das carteiras de investimentos é composta por vários ativos. No entanto, devido à correlação entre os ativos, não é possível obter o VaR da carteira pela soma individual de cada ativo. Sobre este aspecto Jorion (2001) sugere que o VaR de uma carteira possa ser obtido pela seguinte fórmula:

$$VaR_c = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n VaR_i * VaR_j * \rho_{ij}} \text{ ou}$$

$$VaR_c = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + \dots + VaR_n^2 + 2(\rho_{12}VaR_1VaR_2 + 2\rho_{in}VaR_iVaR_n + \dots)} \quad (16)$$

sendo que ρ_{in} é o coeficiente de correlação entre os ativos “i” e “n”.

Em diversos momentos, uma instituição financeira deseja avaliar o incremento (relação risco e retorno) de um determinado ativo em sua carteira de investimentos. Baseadas nessa finalidade, duas abordagens freqüentemente são citadas na literatura para o gerenciamento de risco: o Delta Var (DVaR) e o VaR Incremental (I-VaR). Para o cálculo do Delta VaR, Crouhy *et al.* (2001) propõem que:

$$DVaR_i = \frac{\partial VaR_n}{\partial A_i} A_i \quad (17)$$

Onde DVaR_i, VaR_n e A_i em (17) são, respectivamente, o Delta Var do ativo i, o VaR da carteira com n ativos e a unidade do ativo i da carteira. Dessa forma, define-se o Delta VaR, como o efeito marginal de um ativo sobre a carteira de investimentos. Em outras palavras, o DVaR permite determinar, de forma aproximada, a variação do VaR dada uma pequena mudança na composição da carteira. Já o VaR Incremental apresenta uma abordagem bem mais simples que o Delta VaR. Neste caso, a contribuição de um ativo A sobre o VaR da carteira é dada por:

$$I-VaR(A) = VaR(\text{carteira com ativo A}) - VaR(\text{carteira sem ativo A}) \quad (18)$$

Embora a modelagem para o risco de mercado proposta pelo J. P. Morgan tenha se mostrado eficiente e de fácil implementação, Artzner (1997), por meio de uma abordagem axiomática, classifica o VaR como uma medida não satisfatória. Conforme Artzner (1997), uma medida coerente de risco ρ , dada uma perda X, deve seguir as seguintes condições:

1. O risco é monotônico: se $X \leq Y$, então $\rho(X) \leq \rho(Y)$;
2. O risco é homogêneo: $\rho(t^*X) = t^* \rho(X)$;
3. Condição livre de risco: $\rho(X+nr) = \rho(X)-n$, em que r é taxa de juros livre de risco;
4. O risco é subaditivo: $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.



Sob essas condições, o VaR não pode ser considerado uma medida não coerente de risco, já que não satisfaz, necessariamente, o axioma 4. Entretanto, como foi mencionado anteriormente, uma alocação dos recursos aliada à teoria de Markowitz (1952) proporcionará uma combinação entre ativos de tal forma que a carteira terá uma variância (risco) menor que a soma dos riscos individuais.

2.3. Considerações sobre o Value-at-Risk

Um aspecto muito pertinente para as entidades que necessitam de controle rigoroso para seus investimentos consiste em avaliar as perdas que excedem o VaR. A metodologia proposta por J P Morgan, entre as suas diversas aplicações, pode ser empregada como mensuração do risco de investimentos ou como método de alocação de capital. Nesse sentido, também se faz necessária a compreensão de perdas excessivamente altas, já que em um efeito conjunto do mercado, essas perdas podem causar danos desastrosos para as instituições. Assim, ao avaliar situações extremas, uma variável de interesse seria o valor esperado para a perda, dado que essa foi maior que o Var. Isto é, deseja-se avaliar a esperança condicional da perda. Matematicamente, esta ocorrência pode ser descrita por:

$$E[L / L > VaR] = \int_{VaR}^{\infty} l f_{L/L > VaR}(l) dl = \int_{VaR}^{\infty} \frac{l f_L(l)}{P(L > VaR)} dl = \int_{VaR}^{\infty} \frac{l f_L(l)}{1 - F_L(l)} dl \quad (19)$$

Segundo Reiss e Thomas (1997), uma distribuição muito apropriada para valores extremos de perdas é a distribuição de Pareto. Essa distribuição é composta por dois parâmetros k e β . O parâmetro k representa a menor perda que a distribuição assume, já o parâmetro β controla o peso da cauda superior da distribuição em relação aos valores mais baixos e próximos de k . A densidade de probabilidade de uma variável aleatória X que possui distribuição de Pareto com os parâmetros (k, β) é dada por:

$$f_X(x) = \beta k^\beta x^{-(\beta+1)} \quad \text{com } x > k \quad (20)$$

Além disso, temos que a distribuição acumulada, a esperança e a variância para uma distribuição de Pareto com os mesmos parâmetros são, respectivamente:

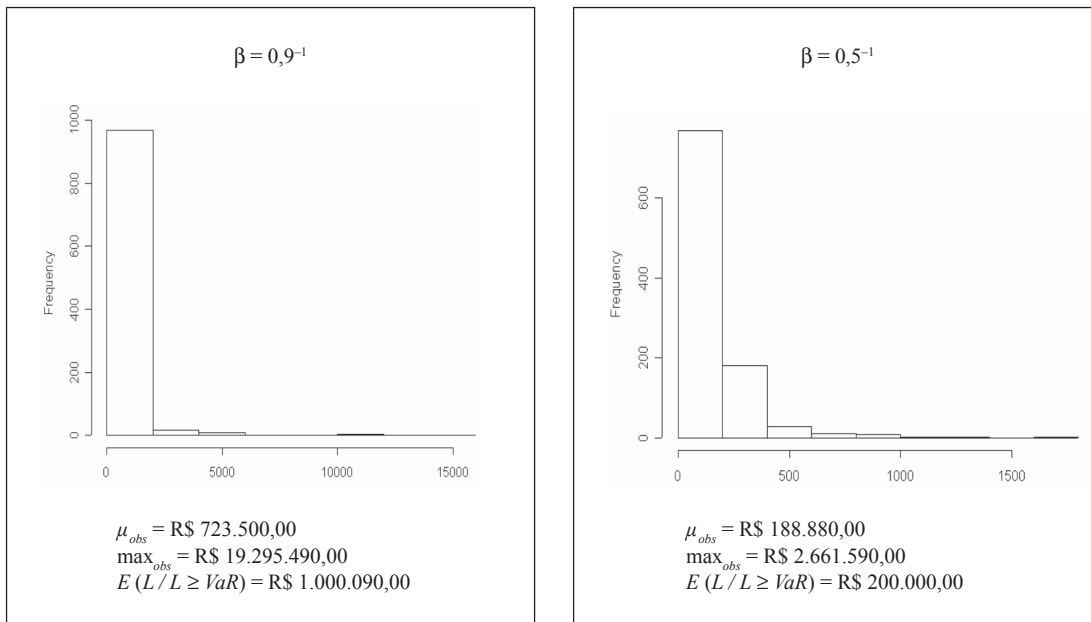
- $P(X \leq x) = 1 - (k/x)^\beta$, onde $\beta > 0$, $k > 0$, $k \leq x$
- $E(X) = \beta k (\beta - 1)^{-1}$, onde $\beta > 1$
- $Var(x) = \beta k^2 (\beta - 1)^{-2} (\beta - 2)^{-1}$, onde $\beta > 2$

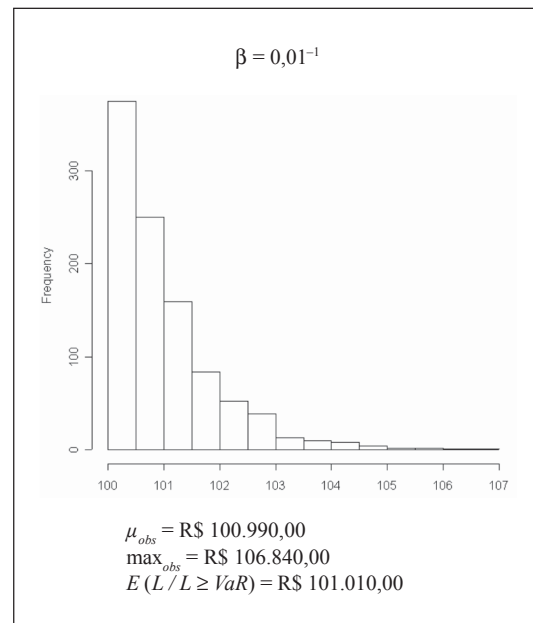
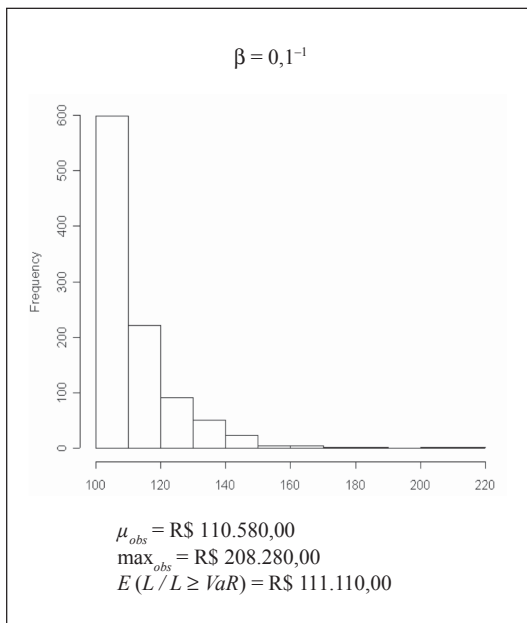
Souza e Silva (1999) propõem que a cauda da distribuição dos retornos identicamente distribuídos em uma amostra grande possa ser aproximada assintoticamente pela distribuição de Pareto. Logo, a esperança condicional, sob a ótica da distribuição de probabilidade dos retornos, pode ser definida como:

$$E(R / R < VaR) = \frac{\beta * VaR}{\beta - 1} \quad (21)$$

Com a equação anterior, bastaria modelar os retornos extremos para um ativo ou uma carteira na tentativa de verificar qual o valor do parâmetro β da distribuição de Pareto que seria mais adequado. Assim, com uma estimativa do parâmetro β , podemos obter uma medida bastante confiável para os valores das perdas extremas, o que na prática significa um excelente suporte em tomada de decisão. Na tentativa de contribuir com uma adaptação ao modelo de gerenciamento de risco de mercado, foram realizadas simulações para perdas excedentes ao um VaR teórico de R\$ 100.000,00, a partir de uma distribuição de Pareto. Assunção (2005) lembra que, para simular os valores desejados, basta aplicar o método da transformação inversa na função acumulada: $F_x^{-1}(u) = K(1-u)^{-1/\beta}$ (u é obtido pela distribuição Uniforme(0,1)).

Figura 2.7 – Simulação para Distribuição de Pareto com diferentes parâmetros





Como pode ser observado no histograma, ao serem implementadas 10.000 simulações, as médias das perdas simuladas a diferentes valores do parâmetro β tendem a esperança condicionada ao VaR. Além disso, ao analisar as perdas máximas para cada β , é razoável considerar que as simulações mais adequadas são aquelas onde o valor do parâmetro seja de aproximadamente 10 ($\beta = 0,1^{-1}$). Além disso, não seria coerente estimar um VaR de R\$100.000,00, dada uma probabilidade de ocorrência, e ainda esperar uma perda excedente de aproximadamente R\$1.000.090,00 ($\beta = 0,9^{-1}$). Assim, caso se observem perdas muito superiores às estimadas pelo VaR, deve-se avaliar as perdas máximas que expressariam estimativas mais coerentes para as perdas, proporcionando um gerenciamento de risco de mercado mais eficaz.

3. Teste de Adequação do Modelo: *Backtesting*

A metodologia do VaR possui uma grande aceitação entre as diversas instituições financeiras, pois apresenta uma medida de risco comum, consistente e integrada para a gama de fatores de risco. Entretanto, existe uma necessidade em avaliar a metodologia e, conseqüentemente, qualificá-la como adequada ou não. Assim, a eficiência do modelo de *Value-at-Risk* é comprovada por técnicas de *backtesting*, onde são comparados perdas e ganhos reais diários com a percentagem de casos em que o resultado ficou fora dos limites de perda máxima, dado um nível de probabilidade pré-estabelecido.

Com o objetivo de apresentar um *backtesting* para o modelo *Value-at-Risk*, este trabalho propõe uma comparação entre o teste razão de verossimilhança, recomendado por Kupiec (1995), e o teste pela aproximação de uma *distribuição Normal* para a proporção do número de falhas em determinado período. Assim, para a realização dos testes,



Adequação do BackTesting no Modelo Value-at-Risk: Comparação entre Aproximação Normal e o Teste de Razão de Verossimilhança

foram coletados dados referentes aos preços dos fechamentos diários de 10 ativos que compuseram o índice Ibovespa, em 02/10/2006. A seleção dos dados foi baseada no critério liquidez (alto poder de compra e venda) e no critério de práticas de boa governança corporativa. Para o primeiro critério, foram selecionados os ativos mais negociados listados no Ibovespa na data de referência. Este critério, por sua vez, é de extrema importância visto que, para entidades que atuam no âmbito atuarial a necessidade de honrar suas obrigações no momento em que as mesmas ocorrem, está associado ao risco de um descompasso no fluxo de caixa que pode gerar incapacidade momentânea de quitar seus compromissos. Vale ressaltar que as ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado à vista (lote-padrão) da Bovespa. Já o segundo critério refere-se a práticas de boa governança corporativa, ou seja, os ativos selecionados se enquadram no nível 1 ou nível 2 da Bovespa. Sendo que as principais características para a prática de boa governança são:

- Melhoria nas informações prestadas, adicionando as Informações Trimestrais. Incluindo as melhorias nas informações relativas a cada exercício social, adicionando as Demonstrações Financeiras Padronizadas (DFPs).
- Realização de uma oferta pública de aquisição de todas as ações em circulação, no mínimo, pelo valor econômico, nas hipóteses de fechamento do capital ou cancelamento do registro de negociação neste Nível. Além disso, realizar reuniões públicas com analistas e investidores, ao menos uma vez por ano.
- Manutenção em circulação de uma parcela mínima de ações, representando 25% (vinte e cinco por cento) do capital social da companhia. E, quando da realização de distribuições públicas de ações, adoção de mecanismos que favoreçam a dispersão do capital.

Conforme os critérios acima, os ativos selecionados atenderiam, por exemplo, à Resolução da CMN 3.121, que estabelece limites e diretrizes para alocação do capital das entidades fechadas de previdência (EFPC) para cada segmento. Assim, sob a ótica do segmento em renda variável, as definições propostas pela resolução são:

Tabela 2.1 – Limite de aplicação das EFPC, conforme Resolução CMN 3.121/03

Segmento de Aplicação	Modalidades de Investimento	Limite (%)
<i>Renda Variável</i>	FI, Ações – Novo Mercado e Nível 2 da BOVESPA	50%
	FI, Ações – Nível 1 da BOVESPA	45%
	FI, Ações – Não citados anteriormente (tradicional)	35%
	Participação em SPE em inversão própria (% patrimônio)	20%
	Infra-Estrutura (FIEE, FIP, Debêntures SPE)	20%

Fonte: Resolução CMN 3.121, de 25/set/2003.



Assim, de acordo com os critérios preestabelecidos listados acima, as ações selecionadas foram: Arcelor Br (ON), Bradesco (PN), Brasil Telecom (PN) Braskem (PNA), Cemig (PN), Gerdau (PN), Itaúbanco (PN), Itausa (PN), Net (PN), Unibanco (UNT), Vale do Rio Doce (PNA), em período de referência de 02/01/2004 a 10/10/2006.

3.1. Comparação entre aproximação Normal e LRT

Para avaliar a adequação do modelo *Value-at-Risk*, ambos os testes que este trabalho propõe comparar são baseados na proporção de falhas, ou seja, deseja avaliar se o número de perdas que excederam o VaR em determinado tempo e dado o nível de significância estabelecido é significativo para comprometer o modelo. Para a comparação, em que ambos os testes que serão comparados a hipótese nula representa um modelo significativo, faz necessária a determinação de algumas variáveis. Assim, temos que:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{VaR}(T, q) \leq L_T \\ 0 & \text{se } \text{VaR}(T, q) > L_T \end{cases}$$

Define-se o número de violações do modelo em uma amostra de tamanho n a variável K , onde:

$$K = \sum_{j=1}^{j=n} I_j$$

Considerando a independência entre os dias, conforme lembra Alexander (2001), k segue uma distribuição binomial com parâmetros (n, p) . Assim, a variável aleatória k (número de falhas) representará o evento sucesso, de tal forma que a probabilidade de ocorrer k sucessos é dada por:

$$P\{X = k/n; p\} = C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \quad (22)$$

Alexander (2001) recomenda também que a distribuição binomial possa ser aproximada por uma distribuição normal quando n for grande. Com essa aproximação, podemos construir o teste de hipótese para proporção do número de perdas excepcionais em n dias e definir a estatística para a região crítica do teste:

$$\begin{cases} H_0 : \hat{p} = 1 - q = k/n \\ H_1 : \hat{p} \geq 1 - q \geq k/n \end{cases}$$

onde a região de não rejeição da hipótese nula é dada por:

$$\left\{ p : \left| \frac{k/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right| \leq z_\alpha \right\} \quad (23)$$



Alternativamente, para comparar com o teste acima, utilizaremos o teste de razão de verossimilhança (LRT), proposto por Kupiec (1995). Assim, devemos assumir que I_1, I_2, \dots, I_n são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d) e, além disso, assumir que \hat{p} é estimador não viesado de p . Então, o teste de razão de verossimilhança (LRT) é definido por:

$$\left\{ p : -2 \ln \left(\frac{L(p|I)}{L(\hat{p}|I)} \right) \leq \chi_{1,1-q}^2 \right\} \quad (24)$$

Na inequação acima, $L(p|I)$ representa a função de máxima verossimilhança do conjunto de observações i.i.d, na qual $L(p|I)$ é obtido pelo produtório $L(p|I_1, I_2, \dots, I_n) = \prod f(I_i, p)$ da função de densidade da variável aleatória I dado o parâmetro p . Como foi mencionado anteriormente, o número de falhas em n dias segue uma distribuição binomial (n, p) . Deste modo, o teste de razão de verossimilhança definido na inequação (24), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{ p : -2 \ln \left(\frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \right) \leq \chi_{1,1-q}^2 \right\} \quad (25)$$

A estatística de teste LRT tem assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade. Para amostras grandes, rejeita-se H_0 (números de perdas esperadas é igual ao número de perdas observadas), a certo de nível de probabilidade, se $LR > \chi_{1,1-q}^2$.

3.2. Resultados

Para comparar os testes propostos acima, os ativos selecionados neste trabalho serviram de base para a formação de uma carteira teórica. A partir dessa carteira, foram realizadas simulações na tentativa de observar o número de vezes em que as perdas superam o valor em risco. Para a realização de várias simulações para essa carteira, duas condições são fundamentais para obter as perdas esperadas:

1. *Correlação entre os ativos*: os comportamentos dos ativos podem apresentar trajetórias correlacionadas, de forma que um ativo qualquer apresente um comportamento semelhante ou divergente em relação a outro ativo ou em relação ao resto da carteira. Neste sentido, para realizar uma simulação que leve em consideração a correlação entre os ativos, utilizou-se a *Decomposição de Cholesky* para a matriz de covariâncias. Então, seja $r = (R_1, R_2, \dots, R_j)'$ o vetor de retornos de j ativos, neste trabalho calculado a partir da média observada em uma janela de tempo passado, ou seja, a média observada do preço do fechamento dos ativos selecionados em período de tempo determinado. A *Decomposição de Cholesky* fornecerá uma matriz C tal que $CC' = V$ (C' é a matriz transposta de C), onde V é matriz de covariâncias. Entretanto, para decompor a matriz de covariâncias, é necessário que essa seja uma matriz positiva semidefinida. Assim, conforme adverte Alexander (2001), se a matriz de covariância



V não for definida semipositiva, então existem carteiras não triviais com variância negativa. Logo, isto não é possível já que a variância da carteira deve ser sempre não negativa. Obtida a matriz triangular inferior C, basta transformar um vetor aleatório $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)'$ normal padronizado em $r^*=Cz+r$. Assim, o vetor aleatório z é convertido em um conjunto de retornos normais r que reflete a estrutura apropriada da covariância entre os ativos.

2. *A mudança da volatilidade ao longo do tempo:* é notável que a volatilidade dos ativos ao longo do tempo possa apresentar uma relação de dependência, ou seja, a variância é diferente ao longo de um determinado período. Na tentativa de atribuir uma importância maior para os dias mais recentes, o *RiskMetrics* estabeleceu uma metodologia conhecida como *EWMA (Exponential Weight Moving Average)*. A média móvel exponencialmente ponderada (*EWMA*) possui um parâmetro λ ($0 < \lambda \leq 1$) chamado “fator de suavização”, que determina a magnitude dos pesos em relação aos retornos passados. Logo, quando λ aproxima-se de zero, maior é a importância das observações recentes em relação àquelas que estão no horizonte de tempo mais distante. Ao passo que, quando o fator de decaimento assume valor um, a *EWMA* torna-se uma média simples. Admitindo uma série de retornos (geométricos ou aritméticos) de um ativo: r_1, r_2, \dots, r_n onde r_1 é o retorno mais recente e r_n o mais antigo, e atribuindo pesos iguais λ^i à observação de i dias atrás, as estimativas do retorno médio e da volatilidade são:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} r_i}{\sum_{i=1}^n \lambda^{i-1}} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} (r_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n \lambda^{i-1}}} \quad (26)$$

Alexander (2001) recomenda que, na maioria dos mercados, o valor do fator de decaimento deva estar entre 0,75 (volatilidade altamente reativa) e 0,98 (volatilidade pouco reativa). O modelo para a média exponencialmente ponderada, proposto pelo *RiskMetrics*, possui duas vantagens importantes sobre o modelo de média simples. Primeiro, segundo *RiskMetrics* (1996), a volatilidade reage mais rapidamente a impactos no mercado quando as observações mais recentes têm um peso maior que os dados no período distante. Além do mais, após uma reação extrema no mercado, a volatilidade declina exponencialmente à medida que o peso da observação diminui.

Assim, após o resultado de várias simulações para uma carteira teórica com os ativos selecionados mencionados anteriormente e considerando o cálculo do VaR e o teste de hipótese com 95% de confiança, obtemos nas tabelas abaixo a comparação entre os dois testes, onde T representa o número de dias analisados, k é números de perdas superiores ao VaR, e \hat{p} é proporção de falhas no período.



Para o fator de suavização $\lambda = 0,94$, como sugere RiskMetrics (1996), temos os seguintes resultados:

Tabela 3.1 – Rejeição do modelo Value-at-Risk com 95% de confiança

<i>T</i>	<i>K</i>	\hat{p}	Aprox. Normal	LRT
T = 100	6	6,00%	NR	Rejeita
	7	7,00%	NR	Rejeita
	4	4,00%	NR	NR
	5	5,00%	NR	NR
	3	3,00%	NR	Rejeita
T = 250	12	4,80%	NR	NR
	13	5,20%	NR	NR
	14	5,60%	NR	Rejeita
	15	6,00%	NR	Rejeita
	11	4,40%	NR	NR
T = 500	25	5,00%	NR	NR
	23	4,60%	NR	NR
	26	5,20%	NR	Rejeita
	27	5,40%	NR	Rejeita
	28	5,60%	NR	Rejeita

Fonte: Resultados da pesquisa.

* NR: Não rejeita a hipótese de que a proporção esperada para o número de perdas é igual à observada.



Para o fator de suavização $\lambda = 0,94$, ou seja, considerando que todas as observações têm a mesma importância ao longo do tempo, podemos observar os seguintes resultados:

Tabela 3.2 – Rejeição do modelo *Value-at-Risk* com 95% de confiança

<i>T</i>	<i>K</i>	\hat{p}	Aprox. Normal	LRT
T = 100	9	9,00%	Rejeita	Rejeita
	7	7,00%	NR	Rejeita
	10	10,00%	Rejeita	Rejeita
	5	5,00%	NR	NR
	11	11,00%	Rejeita	Rejeita
T = 250	17	6,80%	NR	Rejeita
	18	7,20%	NR	Rejeita
	21	8,40%	Rejeita	Rejeita
	19	7,60%	Rejeita	Rejeita
	20	8,00%	Rejeita	Rejeita
T = 500	24	4,80%	NR	NR
	27	5,40%	NR	Rejeita
	26	5,20%	NR	Rejeita
	29	5,80%	NR	Rejeita
	30	6,00%	NR	Rejeita

Fonte: Resultados da pesquisa.

* NR: Não rejeita a hipótese de que a proporção esperada para o número de perdas é igual à observada.

Como pode ser observado pelos resultados acima, a estimação da volatilidade aplicando a metodologia da média exponencialmente ponderada apresentou resultados mais significativos. Em relação aos dois testes, a aproximação pela distribuição Normal padrão revelou um teste bastante conservador, isto é, quando se esperava que 5% das perdas seriam maiores que o VaR, este teste admite, com uma certa aproximação, valores observados acima ou abaixo de 5%. Ao passo que, o teste de razão da verossimilhança apresentou ser um teste muito mais rigoroso do ponto de vista de rejeitar a hipótese de que a proporção de perdas esperadas é igual a 5%. Como advertiu Kupiec (1995), o teste de razão de verossimilhança torna-se mais poderoso em amostras grandes (amostras superiores a 250 dias, como exemplo da recomendação do Comitê da Basileia). Isto pode ser exemplificado nos resultados acima ao comparar uma amostra de 250 e 500 dias. Foi observado, no período de 250 dias, que treze valores de perdas foram superiores ao valor em risco da carteira, que representaram uma proporção de 5,20%. Entretanto, ao comparar com a amostra de período de 500 dias, na qual a proporção de falhas é a mesma, o teste de razão da verossimilhança mostrou-se mais eficiente.



Enfim, como foi mostrado nos resultados acima, o teste de razão da verossimilhança, proposto por Kupiec (1995), tem se mostrado mais eficiente em relação ao teste pela aproximação Normal. Além disso, dois aspectos são extremamente relevantes ao validar o modelo *Value-at-Risk* por meio de teste de hipótese. Primeiro, os dois testes apresentaram baixo poder contra o erro tipo II, ou seja, ambos não rejeitam a hipótese nula quando ela é falsa. E, por último, nota-se que os testes tornam-se mais poderosos quando o tamanho da amostra aumenta. Porém, para a maioria das entidades que assumem compromissos que devem ser honrados com alta severidade, esperar mais de 250 dias para verificar se o modelo é eficiente pode ser tornar inviável na prática.

4. Conclusões

O *backtesting* possui algumas limitações, dentre elas, a principal é o fato de que a carteira de uma instituição não se mantém constante ao longo do tempo, havendo diversas variações de compra e venda ao longo do período analisado. Dessa forma, o resultado da carteira, uma perda ou ganho, no dia seguinte não poderia representar as variações e condições impostas no dia anterior, o que prejudicaria estatisticamente o resultado para a validação do modelo. Entretanto, o Comitê da Basileia, por exemplo, considera que ao trabalhar com um horizonte de um dia as mudanças na composição da carteira não serão muito bruscas. A partir desse trabalho, concluímos que além de utilização de “técnicas de *backtesting*”, é interessante que outras medidas sejam acompanhadas para a validação do VaR. Assim, sugerimos que a aplicação dos testes de normalidade (suposição forte do modelo), aplicações de modelos eficientes de séries temporais (SOUZA E SILVA, 1999) sugerem a implementação dos modelos da família ARCH, avaliações das perdas superiores ao VaR, estudo e aplicações de técnicas eficientes para simulações de resultados antes de obtidos na prática. E, por último, podemos citar que as escolhas de ativos devem ser bastante criteriosas e fundamentadas. Além dos 2 critérios que sugerimos neste trabalho (liquidez e práticas de boa Governança Corporativa), poderíamos acrescentar a aplicação de índices econômicos e financeiros obtidos pelas companhias de capital aberto ao logo dos anos.

É importante ressaltar que para um acompanhamento preciso e eficaz para o gerenciamento de risco é recomendável que as entidades que utilizam a metodologia *Value-at-Risk* executem testes para verificar a qualidade do modelo, caso contrário, poderá ocorrer uma sub ou superestimação da perda que a instituição está sujeita. Entretanto, é necessário que as entidades que adotam VaR como medida de gerenciamento de risco fiquem atentas não apenas à realização dos testes para confrontar os dados observados contra os esperados, mas, também, é preciso que as instituições tenham ferramentas que auxiliem no tratamento das observações ao longo do tempo e procurem desenvolver modelos estatísticos adequados para acompanhar as perdas ou ganhos da entidade.



Reinaldo Antonio Gomes Marques

5. Referências bibliográficas

- ALEXANDER, C. **Modelos de mercado, um guia para a análise de informações financeiras**. São Paulo: BM&F, 2001.
- ASSUNÇÃO, R. M. **Simulação de Monte Carlo em atuária e seguros**. Minas Gerais: UFMG, 2005.
- CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. New York: John Wiley, 1980.
- CROUHY, M.; GALAI, D.; MARKY, R. **Gerenciamento de risco**. São Paulo: Qualimark, 2001.
- JORION, P. **Value at risk: the new benchmark for controlling market Risk**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- KUPIEC, P. H. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. **The Journal of Derivatives**, 1995.
- MARKOWITZ, H. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. New Haven, 1959.
- RISKMETRICS TECHNICAL DOCUMENT. **Riskmetrics**. Fourth Edition, 1996. Disponível em: <www.riskmetrics.com>. Acesso em: 25 set. 2006.
- SOUZA, L. A. R; SILVA, M. E. **Teoria de valores extremos para o cálculo do VaR**. São Paulo: USP, 1999.

